統計的仮説検定

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I　L12(2016-12-22 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2016-12-22 Thu 14:40 JST hig"

今日の目標

- 標本から母比率 塚田確率統計 §7.3.7 を区間推定できる
- 統計的仮説検定の考え方が説明できる 塚田確率統計 §8.1
- 母平均値の t 検定ができる 塚田確率統計 8.2.2

http://hig3.net

L11-Q1
Quiz 解答:母平均値の区間推定 (母分散既知)

1. 重さの標本平均値は $m = 50\text{g}$. よって, 信頼係数 0.95 信頼区間は
$$50 - 1.96 \times \sqrt{\frac{9}{4}} < \mu < 50 + 1.96 \times \sqrt{\frac{9}{4}}.$$
すなわち, $47.06 < \mu < 52.94$.
2. 同様に,
$$50 - 2.58 \times \sqrt{\frac{9}{4}} < \mu < 50 + 2.58 \times \sqrt{\frac{9}{4}}.$$
すなわち, $46.13 < \mu < 53.87$.

L11-Q4
Quiz 解答:母平均値の区間推定 (母分散未知)

1. 重さの標本平均値は $m = 50\mathrm{g}$. 不偏標本分散は $s^2 = \frac{1}{4-1} \cdot 14\mathrm{g}^2$. 自由度 $k = n - 1 = 3$ の t 分布表を参照して, 信頼係数 0.95 の信頼区間は

$$50 - 3.182 \times \sqrt{\frac{1}{4}\frac{14}{3}} < \mu < 50 + 3.182 \times \sqrt{\frac{1}{4}\frac{14}{3}}.$$

2. 同様に,

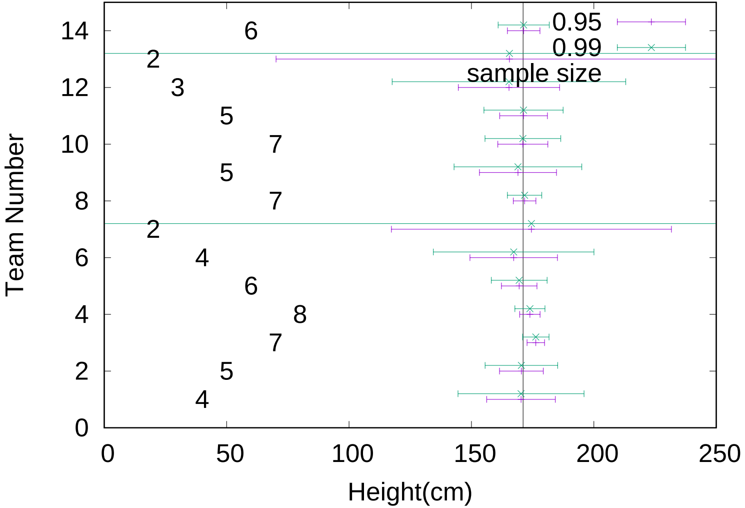
$$50 - 5.841 \times \sqrt{\frac{1}{4}\frac{14}{3}} < \mu < 50 + 5.841 \times \sqrt{\frac{1}{4}\frac{14}{3}}.$$

ここまで来たよ

12 母平均値の区間推定
- 母分散未知, 大標本の場合
- 母比率または二項分布の母平均値の区間推定

13 統計的仮説検定
- 統計的仮説検定の考え方
- 正規分布にしたがう母集団の母平均値に関する t 検定

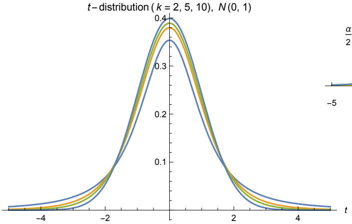
チーム別の推定の結果

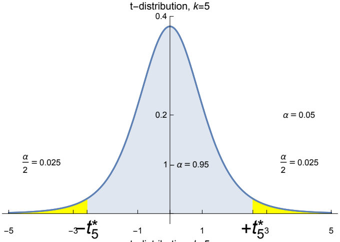

0.95
0.99
sample size
Team Number
Height(cm)
0
2
4
6
8
10
12
14
0
50
100
150
200
250
6
2
3
5
7
5
7
2
4
6
8
7
5
4

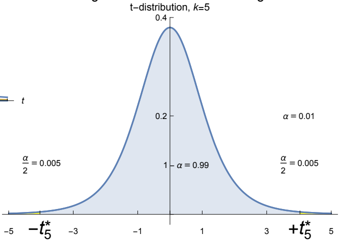
t 分布表 塚田確率統計付録 B 表 B3

上側確率 $\alpha/2 = 0.025, 0.005$, 自由度 k に対して, $\alpha/2 = P(T > t_k^*)$ となる t_k^* の値の表.

$k\backslash$ 上側確率$\alpha/2$	0.025	0.005
1	12.71	63.66
2	4.303	9.925
3	3.182	5.841
4	2.776	4.604
5	2.571	4.032
6	2.447	3.707
7	2.365	3.499
8	2.306	3.355
9	2.262	3.250
10	2.228	3.169
11	2.201	3.106
12	2.179	3.055
13	2.160	3.012
14	2.145	2.977
15	2.131	2.947
16	2.120	2.921
17	2.110	2.898
18	2.101	2.878
19	2.093	2.861
20	2.086	2.845
30	2.042	2.750
40	2.021	2.704
50	2.009	2.678
60	2.000	2.660
80	1.990	2.639
100	1.984	2.626
$+\infty$	**1.960**	**2.576**







母平均値の区間推定 (母分散未知, 大標本) 高校 数学 B

自由度 $n-1$ が大きいとき, t 分布のかわりに $\mathrm{N}(0,1^2)$ を使っても大した誤差じゃない. また, 母集団が正規分布でなくても, 中心極限定理から, 近い結果になることが多い.

物理実験

L12-Q1

Quiz(母平均値の区間推定 (母分散未知, 大標本))

あるドーナツ製造マシンが次々に製造するドーナツの重さ X_ig は, 独立同分布にしたがう確率変数である.
製造された 400 個のドーナツの重さを測定したところ, 次のようだった.
$51\mathrm{g}, 52\mathrm{g}, 47\mathrm{g}, \ldots, 50\mathrm{g}$.
ここから標本平均値, 不偏標本分散を計算したところ, $m = 51\mathrm{g}, s^2 = 4\mathrm{g}^2$ だった.

1. 母平均値 $\mu = \mathrm{E}[X_i]$ を, 信頼係数 $1-\alpha = 0.95$ で区間推定しよう.
2. 母平均値 $\mu = \mathrm{E}[X_i]$ を, 信頼係数 $1-\alpha = 0.99$ で区間推定しよう.

ここまで来たよ

母比率の信頼区間 塚田確率統計 §7.3.6 高校 数学 B

母比率の区間推定

母比率の信頼係数 $1-\alpha=0.95$ の信頼区間は，サンプルサイズ n と標本比率 $\hat{p}=Y/n$ により，

$$\hat{p}-1.96\times\sqrt{\frac{1}{n}\hat{p}(1-\hat{p})}<p<\hat{p}+1.96\times\sqrt{\frac{1}{n}\hat{p}(1-\hat{p})}.$$

母比率の信頼係数 $1-\alpha=0.99$ の信頼区間は

$$\hat{p}-2.58\times\sqrt{\frac{1}{n}\hat{p}(1-\hat{p})}<p<\hat{p}+2.58\times\sqrt{\frac{1}{n}\hat{p}(1-\hat{p})}.$$

L12-Q2

Quiz(母比率の区間推定)

選挙で出口調査をしたところ, 50 人中 35 人が A 候補に投票したと答えた. 母集団を投票した人全体とする. そのうち A 候補に投票した人の母比率 (得票率) を考える.

1. A 候補の得票率を, (点) 推定しよう
2. A 候補の得票率を, 信頼係数 $1-\alpha=0.95$ で区間推定しよう.
3. A 候補の得票率を, 信頼係数 $1-\alpha=0.99$ で区間推定しよう.

注: 下限, 上限が 0,1 を越えるときは, 0,1 に直してしまっていい.

L12-Q3 塚田確率統計問 7.4.4

ここまで来たよ

12 母平均値の区間推定
- 母分散未知, 大標本の場合
- 母比率または二項分布の母平均値の区間推定

13 統計的仮説検定
- 統計的仮説検定の考え方
- 正規分布にしたがう母集団の母平均値に関する t 検定

推定と検定 塚田確率統計 §8.1

点推定 μ は値 xxx と推定する

区間推定 μ は値 xxx と値 yyy の間と推定する (信頼係数 $1-\alpha=0.95$ で)

検定 μ は値 xxx と $\boxed{}$ する (有意水準 α で) or あるかどうかわからないと言う

あるドーナツ製造器は, 重さ X(確率変数) の母平均値が 55g であるように調整済みだという. しかし, 5 個買ってみたら, みんな軽めな感じ. これ, 本当に母平均値 55 g なの?(っていうか 55 g でないと言いたい).

ある学習法を使ってるある生徒の, 毎日のテストでの 1 か月の平均点は 63 点. 自分が別の学習法で教えた 5 日間の平均点は $\cdots$. 自分の方法は優れていると言いたい.

なぜ統計的仮説検定?

心理学, 教育学, 社会科学などでは標本サイズが大きくできないことが多い. 標本サイズが小さくても Yes/No のいちおうの結論を出す, 科学業界で合意された方法が

検定 (test)=統計的仮説検定 (statistical hypothesis test)

真の母平均値は 55g と異なる, を $\boxed{\text{証明}}$ したい

しか〜し, ≠ の証明はやりにくい 54g である, ことが証明できれば十分だけど, 有限サイズの標本からはとうてい無理.

こういうときの常套手段は $\boxed{}$. 否定の命題「55g である」を仮定して $\boxed{\text{矛盾}}$ を導く.

注意

以下, $\boxed{\text{証明}}$, $\boxed{\text{矛盾}}$ は, この回の授業のローカル用語. 証明みたいなもの, 矛盾みたいなもの.

帰無仮説と対立仮説

- H_0:帰無仮説 (null hypothesis) ＝ 背理法の仮定 ＝ 「真の母平均値 μ は 55g に等しい」
- H_1:対立仮説 (alternative hypothesis) ＝ 示したい命題 ＝ 「真の母平均値 μ は 55g でない」

上のは両側検定.
対立仮説が H_1: $\mu > 55$ という形の 片側検定 もある 確率統計☆演習 II

有意水準 α

誤りの確率をどれだけ許すか. $\boxed{\text{証明}}$は確率 α で間違いを含む. $\boxed{\text{矛盾}}$とは起きない現象 (確率 α の例外を除いて).

ここでいう $\boxed{\text{矛盾}}$ とは

⇔ めったにない (確率 α 以下の) 事象が起きてしまった標本である
⇔ 検定統計量 Y を標本に対して計算したら, (確率 α 以下でしか起きない) 極端に大きな/小さな値をとった
⇔ 検定統計量 Y を標本に対して計算したら, (有意水準 α の) 棄却域に含まれる値になった

$\boxed{\text{矛盾}}$ が導かれるとき,

- H_0 を棄却 (reject) する
- H_1 を採択 (accept) する
- 標本が有意である (significant)

H_1 が $\boxed{\text{証明}}$ されたということ.

$\boxed{\text{矛盾}}$ が導けなかったとき,

- H_0 を棄却できない
- H_0 を採択する
- 標本が有意でない (not significant)

H_0 が $\boxed{\text{証明}}$ できたわけではない

例え話による$\boxed{\text{矛盾}}$の説明

塚田確率統計 §8.1

統計的仮説検定

- 自称超能力者がコインを 4 回投げたところ, すべて表だった. 自称超能力者はコインを操作できない (表が出る確率 $\frac{1}{2}$) と仮定すると矛盾するか? 有意水準を $\alpha = 0.05$ とする.
- 自称超能力者がコインを 6 回投げたところ, すべて表だった. 自称超能力者はコインを操作できない (表が出る確率 $\frac{1}{2}$) と仮定すると矛盾するか? 有意水準を $\alpha = 0.05$ とする.

答案や論文での検定の書き方

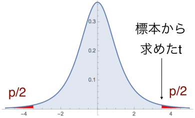
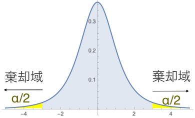
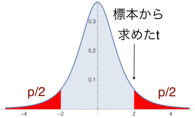
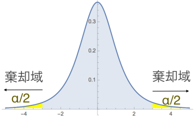
レポートもこれで.
母集団を決める. 母集団の分布タイプを仮定する.

1. 「有意水準 $\alpha = \cdots$ で」「…検定を行う」(2,3 を名前で予告する)
2. 「帰無仮説を…とする」
3. 「帰無仮説のもとで検定統計量 Y は …分布にしたがう」
4. 「この標本に対して検定統計量 $y = \cdots$ である」
5. 「(y の不等式…) より帰無仮説を棄却する/棄却できない」「よって母ナントカは…である (とはいえない)」

検定統計量 Y この場合はこういう Y を取るとよい, というマニュアルができている. 取り方についた名前が「…検定」. たまにもっといいのを見つける人もいる.
最初のうちは, 参考書を見て, この状況ではこの検定統計量の…検定, という解法パターン的対処でいいでしょう. 不適切な検定を無理に使わないようにしよう.

不等式と棄却

p 値$=p=$ (y_1より極端な値をえる確率).

	帰無仮説を棄却	帰無仮説を棄却しない
	$\alpha > p$	$\alpha < p$
t 検定で	y^* より y_1 が極端 y が棄却域に含まれる $t^*_{n-1} < \|t\|$   	y^* より y_1 が極端でない $t^*_{n-1} > \|t\|$  

ここまで来たよ

12. 母平均値の区間推定
    - 母分散未知, 大標本の場合
    - 母比率または二項分布の母平均値の区間推定

13. 統計的仮説検定
    - 統計的仮説検定の考え方
    - 正規分布にしたがう母集団の母平均値に関する t 検定

正規分布にしたがう母集団の母平均値に関する t 検定 I

L12-Q1

Quiz(母平均値の検定 (母分散未知)=t 検定)

あるドーナツ製造マシンが次々に製造するクロワッサンドーナツの重さ $X_i\mathrm{g}$ は, 正規分布にしたがうことがわかっている. 母平均値は $57\mathrm{g}$ だと思っていたが, きょう 5 個製造したところ, 下のようだった.
$52\mathrm{g}, 52\mathrm{g}, 53\mathrm{g}, 48\mathrm{g}, 50\mathrm{g}.$
本当にドーナツ製造マシンが次々に製造するクロワッサンドーナツの重さ $X_i\mathrm{g}$ の母平均値は $57\mathrm{g}$ なのだろうか. 統計的仮説検定を行って判定しよう.

L12-Q2

Quiz(正規分布の母平均値に関する t 検定)

あるコンビニには，ドーナツ販売開始前には，9:00–10:00 に平均 196 人の客が来店していた．ドーナツ販売開始後の 4 日間，来店客数は次の通りだった．$204, 208, 188, 200$
来店者数は正規分布にしたがうと考える．ドーナツ販売開始後に来店客数の母平均値は変化したか?

L12-Q3 塚田確率統計 8.9.1
L12-Q4

理工学部生の平均身長に関する統計的検定

日本の大学生の平均身長は 160cm であると耳にした (←教員の捏造)．理工学部生の平均身長は，これと異なるという仮説を立証したい．
理工学部生全体 (母集団) の身長が正規分布にしたがうとして，自分のチームのデータから，統計的仮説検定で立証を試みよう．

母比率の検定

塚田確率統計 §8.5

連絡

- t 検定のレポート．Learn Math Moodle で個人別問題を印刷して, 1–6 の全てのステップを記入．2017-01-12 木の授業, 12 木,16 月,17 火 の Math ラウンジに提出．
- 予習問題は, 次々回の授業直前を締切 (そこまでの最高点を記録) とします．でも, Trial までにやったほうが効率いいと思う．前からそうだけど, 予習問題が満点だと, Trial の満点の 1/3 まで保証されます．
- ごめんなさい Manaba のレポートを改めて公開してます．
- 次回は母分散の区間推定と検定とカイ二乗分布 塚田確率統計 §4.9,§7.3.5, §8.3.2
- 配布資料は 1-503 向かいの引出, `http://hig3.net` で再配布．
- 加減乗除と平方根 (ルート) の使える電卓持ってきてね．関数電卓でなくてもいいです．携帯電話の機能・アプリでもかまいません．
- 樋口オフィスアワー木 6 金昼 (1-502), Math ラウンジ月-木昼 (1-614)

`https://manaba.ryukoku.ac.jp`