母分散の区間推定と検定

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I　L13(2017-01-12 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2017-01-19 Thu 00:02 JST hig"

今日の目標

- カイ二乗分布の定義と母平均値が説明できる 塚田確率統計 §4.9
- 標本から母分散を区間推定できる 塚田確率統計 §7.3.5
- 標本から母分散のカイ二乗検定ができる 塚田確率統計 §8.3.2

http://hig3.net

L12-Q1

Quiz 解答:母平均値の区間推定 (母分散未知, 大標本)

1. 大標本なので, t 分布の自由度 ∞ の場合, すなわち標準正規分布で考えてよい. 信頼係数 0.95 信頼区間は
$$51 - 1.96 \times \sqrt{\frac{4}{400}} < \mu < 51 + 1.96 \times \sqrt{\frac{4}{400}}.$$
2. 同様に,
$$51 - 2.58 \times \sqrt{\frac{4}{400}} < \mu < 51 + 2.58 \times \sqrt{\frac{4}{400}}.$$

L12-Q2

Quiz 解答:母比率の区間推定

A 候補に投票したを $X = 1$, しなかったを $X = 0$ とする.

1. 標本比率は $\hat{p} = \frac{35}{50} = 0.7$. 母比率 p を 0.7 と推定する.

2. X の母分散は $0.7 \times (1-0.7) = 0.21$ と推定する.
母比率 p の信頼係数 $1-\alpha = 0.95$ の信頼区間は,

$$\begin{aligned} 0.7 - 1.96 \times \sqrt{\frac{1}{50} \cdot 0.21} <& p < 0.7 + 1.96 \times \sqrt{\frac{1}{50} \cdot 0.21} \\ 0.7 - 0.13 <& p < 0.7 + 0.13 \\ 0.57 <& p < 0.83 \end{aligned}$$

信頼係数 0.95 で当選ってことですね (放送用語「当選確実」).

3. 母比率 p の信頼係数 0.99 の信頼区間は,

$$\begin{aligned} 0.7 - 2.58 \times \sqrt{0.0042} <& p < 0.7 + 2.58 \times \sqrt{0.0042} \\ 0.7 - 0.17 <& p < 0.7 + 0.17 \\ 0.53 <& p < 0.87 \end{aligned}$$

信頼係数 0.99 のほうが慎重な判断基準ですが, それでも当選ってことですね.

L12-Q4
Quiz 解答:母平均値の検定 (母分散未知)=t 検定

1. 有意水準 0.05 で, 正規分布の母平均値に対する t 検定を行う.
2. 帰無仮説を「ドーナツの重さの母平均値 μ が 57g に等しい」とする.
3. サイズ $n = 5$ の標本の標本平均値を $\bar{X}$, 不偏標本分散を s^2 とするとき, 検定統計量
$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{s^2/n}}$$
は, 自由度 $5 - 1$ の t 分布に従う.
4. この標本に対して, $t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{51-57}{\sqrt{\frac{1}{5}\frac{16}{5-1}}} = -3\sqrt{5} = -6.708.$
5. t 分布表より, $t_4^* = 2.776 < |t|$ だから, 帰無仮説を棄却する. ドーナツの重さの母平均値は 57g と異なる, と結論する.
(注: このことを, 「有意」「有意差」などの言葉で表現する人もいる. 結果は有意である, 母平均値 μ は 57g と有意に異なる, 母平均値 μ と 55 の間には有意差がある, 有意な標本である, など)

L12-Q5

Quiz 解答:正規分布の母平均値に関する t 検定

1. 有意水準 0.05 で, 正規分布の母平均値に対する t 検定を行う.
2. 帰無仮説を「ドーナツ販売開始後の, 来店客数の母平均値 μ は 196 に等しい」とする.
3. サイズ $n=4$ の標本の標本平均値を $\bar{X}$, 不偏標本分散を s^2 とすると, 検定統計量
$$T=\frac{\bar{X}-196}{\sqrt{s^2/n}}$$
は, 自由度 $4-1$ の t 分布に従う.
4. この標本に対して, $\bar{X}=200, s^2=\frac{224}{4-1}=74.7$. よって, $t=\frac{200-196}{\sqrt{\frac{1}{4}\frac{224}{3}}}=0.92582.$

5. t 分布表より, $t_3^* = 3.182 > |t|$ だから, 帰無仮説は棄却できない. 来店客数が変化したとは結論できない.
(注: 結果は有意でなかった, 母平均値 μ と 196g の間には有意差がない, など).

母比率の検定

母比率の検定 塚田確率統計 §8.3 というのもある.

ここまで来たよ

ばらつき (不偏標本分散) のばらつきを考えたい

ポテトフライ S の重さのばらつきって? $\sqrt{\text{母分散}} \overset{\text{点推定}}{\longleftarrow} \sqrt{\text{不偏標本分散}}$

- 母分散の点推定の精度って?

	の点推定	の区間推定
母平均値 μ	標本平均値 $\overline{X} = \frac{1}{n}[X_1 + \cdots]$	$\overline{X} - \Box\sqrt{} < \mu < \overline{X} + \Box\sqrt{}$
母分散 σ^2	不偏標本分散 $s^2 = \frac{1}{n-1}[(X_1 - \overline{X})^2 + \cdots]$	$< \sigma^2 <$

母集団が正規分布にしたがうとき

- 標本平均値の分布 ($\boxed{}$) を平行移動, 拡大縮小すると標準正規分布
- 不偏標本分散の分布を拡大縮小するとカイ二乗分布

塚田確率統計 §4.9

標準正規分布 $Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$ のとき,

$2Z$

$Z + 3$

$2Z + 3$

$Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_k$

$\mathrm{V}[Z] = \mathrm{E}[Z^2] - 0^2$
Z^2

$Z_1^2 + Z_2^2$

$\vdots$
$Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_k^2$

カイ二乗分布 塚田確率統計 §4.9

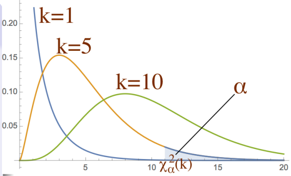
カイ二乗分布

$Z_1, \ldots, Z_k$, を標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ に従う独立な確率変数とするとき，
確率変数 $Y = Z_1^2 + \cdots + Z_k^2$ とおく．
Y は，自由度 k のカイ二乗分布 χ_k^2 に従う．

言語	小	大	読み
英語	x	X	エクス
ギリシャ語	χ	X	カイ

χ_k^2 の確率密度関数

$$f_k(y) = \begin{cases} C_k \times y^{\frac{k}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y} & (y \geq 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$



$$\mathrm{E}[Y] = E[Z_1^2 + \cdots + Z_k^2] = k, \mathrm{V}[Y] = \text{積分} = 2k.$$

$$\frac{1}{C_k} = \int_0^\infty y^{\frac{k}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y}\, \mathrm{d}y = (\tfrac{k}{2})! 2^{\frac{k}{2}}.$$

ここまで来たよ

不偏標本分散のしたがう分布

不偏標本分散のしたがう分布 塚田確率統計 §7.3.5

確率変数 X が正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ に従うとする．サイズ n の標本の不偏標本分散

$$s^2 = \frac{1}{n-1}[(X_1 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_n - \overline{X})^2]$$

を考えたとき，

$$Y = (n-1) \times \frac{s^2}{\sigma^2}$$

は自由度 $k = n - 1$ の カイ二乗分布 χ^2_{n-1} に従う．

分散の比 $\frac{\text{不偏標本分散}}{\text{母分散}}$ は 1 に近いが，実は，$\frac{Y}{n-1}$．$(Y \sim \chi^2_{n-1})$

証明じゃないけど説明

独立な $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ $(i = 1, \ldots, n)$ に対して,

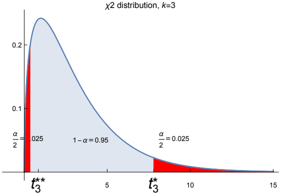
$$n \times \frac{1}{n}\left[\left(\frac{X_1 - \mu}{\sigma}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_n - \mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

は自由度 n のカイ二乗分布 χ^2_n にしたがう.
不偏標本分散 s^2 に対して,

$$Y = (n-1) \times \frac{s^2}{\sigma^2} = (n-1) \times \frac{1}{n-1}\left[\left(\frac{X_1 - \overline{X}}{\sigma}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_n - \overline{X}}{\sigma}\right)^2\right]$$

は自由度は $n-1$ のカイ二乗分布 χ^2_{n-1} にしたがう.
$-\mu$ でなく $-\overline{X}$ であるため自由度 $n-1$.

母分散の区間推定



χ_k^*, χ_k^{**} の定義と値 塚田確率統計表 B.4

上側 2.5%点 χ_k^*: $\frac{\alpha}{2} = 0.025 = P(Y > \chi_k^*)$.

下側 2.5%点 χ_k^{**}: $\frac{\alpha}{2} = 0.025 = P(Y < \chi_k^{**})$.

$$P\left(\chi_{n-1}^{**} < (n-1) \times \frac{s^2}{\sigma^2} < \chi_{n-1}^*\right) = 1 - \alpha$$

不等式を σ^2 について解いて,

母分散の信頼区間 塚田確率統計 §7.3.5

標本の不偏標本分散が s^2 のとき, 母分散 σ^2 信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は

$$\frac{n-1}{\chi_{n-1}^*} \times s^2 < \sigma^2 < \frac{n-1}{\chi_{n-1}^{**}} \times s^2$$

だいたい s^2 だけど, 「かける」補正係数 $\frac{n-1}{\chi_{n-1}} \simeq 1$.

L12-Q1

Quiz(母分散の区間推定)

あるファーストフードチェーンのポテトフライ S の重さは正規分布に従うという.
お店で 9 個のポテトフライ S サイズを買って重さを量り, サイズ 9 の標本とした. このとき
標本平均値は $80\mathrm{g}$, 不偏標本分散は $72\mathrm{g}^2$ だった.
母分散を信頼係数 $1-\alpha=0.95$ で区間推定しよう.

L12-Q2

チームの標本から，クラスの身長の母分散を区間推定しよう．

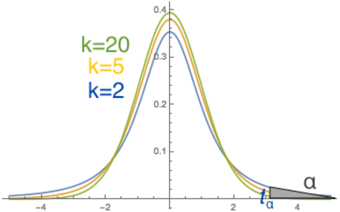
チーム	サンプルサイズ n	不偏標本分散 s^2(g^2)
1	4	77.6
2	5	51.8
3	7	14.9
4	8	24.7
5	6	47.9
6	4	126.3
7	2	40.5
8	7	25.0
9	5	160.5
10	7	122.0
11	5	61.6
12	3	69.3
13	2	112.5
14	6	40.3

t 分布とは

t 分布 塚田確率統計 §4.11

確率変数 Z が標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1^2)$, 確率変数 Y が自由度 k のカイ二乗分布 χ_k^2 にしたがい, Z と Y が独立であるとき, 連続型確率変数 $T=\frac{Z}{\sqrt{Y/k}}$ のしたがう分布を自由度 k の (スチューデントの, またはゴセットの)t 分布という.

だから, 標本平均値 $\overline{X}$ から作った統計量 $T=\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{S^2}}=\frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}}{\sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}}}=\frac{Z}{\sqrt{Y/k}}$ は t 分布にしたがう.



k が小さいとずれが大きいが, $k\to+\infty$ では Y と Z はほぼ同じ.

復習:正規分布の標本平均値の分布 (母分散未知)

不偏標本分散で正規化した標本平均値の分布

X_i $(i=1,2,\ldots,n)$ を母平均値 μ, 母分散 σ^2 の独立同分布にしたがう確率変数とする (すなわち, ある分布からとるサイズ n の標本とする).

$$
\begin{aligned}
\text{標本平均値}\overline{X} &= \frac{1}{n}[X_1+\cdots+X_n],\\
\text{不偏標本分散 } s^2 &= \frac{1}{n-1}[(X_1-\overline{X})^2+\cdots+(X_n-\overline{X})^2]
\end{aligned}
$$

から作った量

$$
T=\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{s^2/n}}\left(=\frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\frac{1}{n-1}}}=\frac{Z}{\sqrt{Y/(n-1)}}\right)
$$

は, 自由度 $n-1$ の t 分布にしたがう.

なぜなら, 最右辺で分子 $Z\sim\mathrm{N}(0,1^2)$, 分母の $Y=\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ は自由度 $n-1$ のカイ二乗分布にしたがい, 実は独立だから. 確率統計☆演習 II(2017)L

ここまで来たよ

13 統計的仮説検定

14 母分散の区間推定と検定
- 不偏標本分散のばらつきとカイ二乗分布
- 母分散の区間推定
- 母分散の検定

母分散のカイ二乗検定 (母平均値未知) 塚田確率統計 §8.3.2

未知の正規分布からの標本に基づき, 母分散が σ_0^2 かどうか判定したい!(σ_0^2 でないと言いたい)

- 対立仮説 H_1 母分散 $\sigma \neq \sigma_0$.
- 帰無仮説 H_0 母分散 $\sigma = \sigma_0$.

カイ二乗統計量 $Y = (n-1) \times \frac{s^2}{\sigma_0^2}$ に対して,

$$P\left(\chi_{n-1}^{**} < Y < \chi_{n-1}^{*}\right) = 1 - \alpha.$$

母分散のカイ二乗検定の棄却域

有意水準 α での棄却域は, 上の不等式の定める区間の外側 (両側).

$$Y < \chi_{n-1}^{**}, \chi_{n-1}^{*} < Y$$

L12-Q3

TA Prob and Sol:母分散の検定

あるファーストフードチェーンのポテトフライ S の重さは, 母分散が $4\mathrm{g}^2$ であることが定められているという.
トレーニング中のアルバイトの人に, ポテトフライ S サイズを 9 個作ってもらったところ, 重さは下のようだった (単位は g).

$$76, 76, 76, 76, 80, 84, 84, 84, 84.$$

このアルバイトの作るポテトフライ S の重さの母分散 σ^2 は, 2^2 と異なるか? 重さが正規分布にしたがうと仮定し, 有意水準 $\alpha = 0.05$ で, 母分散のカイ二乗検定で判定しよう.

略解

1. 有意水準 $\alpha = 0.05$ で, 母分散のカイ二乗検定を行う.

2. 帰無仮説を,「アルバイトの…重さの正規分布の母分散 σ^2 は, 2^2 に等しい」とする
3. サイズ n の標本の不偏標本分散を s^2 とすると, 量 $Y=(n-1)\times\frac{s^2}{2^2}$ は, 自由度 $n-1$ のカイ二乗分布に従う. この量を検定統計量として用いる.
4. この標本に対して $Y=(n-1)\times\frac{s^2}{2^2}=(9-1)\cdot\frac{16}{2^2}=32.$
5. カイ二乗分布表より, この値は, 棄却域 $Y<\chi^{**}_{9-1}=2.180$, $Y>\chi^{*}_{9-1}=17.53$ に含まれるので帰無仮説を棄却する. 母分散は 2^2 と異なると結論する.

棄却域に含まれなかったときの書き方は,「棄却域に含まれないので帰無仮説は棄却できない. 母分散と 2^2 が異なるとは結論できない.」

連絡

- t 検定のレポート．Learn Math Moodle で個人別問題を印刷して, 1–6 の全てのステップを記入．2017-01-12 木の授業, 12 木,16 月,17 火の Math ラウンジに提出.
- カイ二乗検定のレポート．Learn Math Moodle で個人別問題を印刷して, 1–6 の全てのステップを記入．2017-01-19 木の授業，または 19 木,23 月の Math ラウンジに提出.
- 予習問題は, 次々回の授業直前 を締切 (そこまでの最高点を記録) とします．でも, Trial までにやったほうが効率いいと思う．前からそうだけど, 予習問題が満点だと, Trial の満点の 1/3 まで保証されます.
- 次回は有意水準・検定力 塚田確率統計 §8.1,8.8 ,p 値 塚田確率統計 p.178 , 統計ソフトウェア 塚田確率統計付録 A
- 配布資料は 1-503 向かいの引出, `http://hig3.net` で再配布.
- 加減乗除と平方根 (ルート) の使える電卓持ってきてね．関数電卓でなくてもいいです．携帯電話の機能・アプリでもかまいません.
- 樋口オフィスアワー木 6 金昼 (1-502), Math ラウンジ月-木昼 (1-614)

`https://manaba.ryukoku.ac.jp`

ファイナルトライアル出題計画

外部記憶ペーパー使えます．電卓使用なし．必要な表は印刷します．R/Excel の問題はありません．
過去問題を公開していますが，出題傾向は毎年変わります．去年のものに対応するより，下の出題計画と Trial を参照することをお奨めします．
大注意:この計画は確定版ではありません．2017-01-20 金までに精密化・確定します．

- 連続型確率変数の確率・母期待値・母平均値・母分散を求める (L06, プチテスト再出題)
- 正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ にしたがう確率変数が，ある条件を満たす確率を求める (L09)
- 二項分布にしたがう確率変数の確率を正規分布を利用して計算する (L10)
- ある独立同分布にしたがう確率変数の和の母平均値・母分散・確率を正規分布を利用して計算する (L10)
- 標本から母平均値を点推定・区間推定する (L10,L11)
- 標本から母分散を点推定・区間推定する (L10,L13)
- 標本から母比率を点推定・区間推定する (L11,L12)
- 標本から母平均値の t 検定を行う (L12)
- 標本から母分散のカイ 2 乗検定を行う (L13)
- 標本抽出と推定と検定の意味に関する選択肢的な問 (数個)