確率統計☆演習 I プチテスト

樋口さぶろお[1] 配布: 2017-11-22 水 更新: Time-stamp: "2018-01-08 Mon 15:08 JST hig"

プチテスト参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

結果のみを Web に

次のうち, 正しいものを選択しよう.

1. 身長 Xcm, 体重 Y g の 2 変量データ (X, Y) の相関係数の値は, 身長 X'm, 体重 Y' kg に直した 2 変量データ (X', Y') の相関係数の値に等しい.
2. 連続型確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が最大値をとる x が母平均値 $\mathrm{E}[X]$ に等しい.
3. 確率変数 X に対して, つねに $\mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2 \geq 0$ が成立する.
4. 任意の関数 $g(x)$ と, 任意の確率変数 X に対して, $\mathrm{E}[g(X)] = g(\mathrm{E}[X])$ が成立する.
5. 任意の関数 $g(x)$ と, 任意の確率変数 X に対して, $\mathrm{E}[-3X + g(X)] = -3\mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[g(X)]$ が成立する.

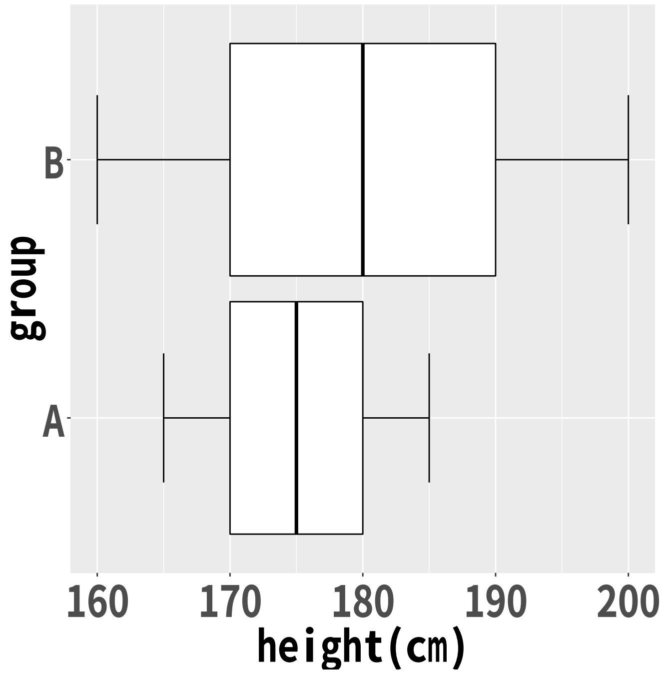
2

結果のみを Web に (単位入力不要)

4000 人からなる group A と, 6000 人からなる group B の身長 (cm) を測定して箱ひげ図に表したものが次である.

1. group B を身長の大きい方から小さい方に並べたとき, 1500 位 (くらい) の人の身長を答えよう.
2. group A を身長の大きい方から小さい方に並べたとき, 3000 位 (くらい) の人が, グループ B に移ったとき, グループ B では何位になるか答えよう.
3. group A で身長が 170cm 以上 180cm 未満の人の人数は, group B で身長が 170cm 以上 180cm 未満の人の人数の何倍か. 小数で答えよう.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502



3

結果のみを Web に

あるクラスの 100 点満点の点数 x は, 平均点 80 点, 標準偏差 20 点だった. クラスの 1 人である A 君の点数は 70 点だった.

後から, 点数を換算する必要が発生したので, 400 点満点の換算点数を, $y = 100 + 3x$ と決めた.

1. A 君の点数 x の標準得点 (z スコア) を求めよう.
2. A 君の点数 x の偏差値を求めよう.
3. 換算点数 y のクラスの平均値を求めよう.
4. 換算点数 y のクラスの分散を求めよう.
5. A 君の換算点数 y の標準得点を求めよう.

4

結果のみを紙に

10000 つかみしても取り切れないくらいの, 多量の米粒がケースに入っている.

ある人が, 右手でひとつかみしたときに取れる米粒の重さは確率変数 X g と考えることができ, 母平均値 $\mathrm{E}[X] = 120\mathrm{g}$, 母分散 $\mathrm{V}[X] = 70\mathrm{g}^2$ であるという.

この人が 1 つかみを 10 回繰りかえしたときに取る米粒の重さの合計を確率変数 W g とする. また確率変数 $U = \frac{1}{10}W$ を考える.

1. 母平均値 $\mathrm{E}[W]$, 母分散 $\mathrm{V}[W]$ を, 単位をつけて求めよう.
2. 母平均値 $\mathrm{E}[U]$, 母分散 $\mathrm{V}[U]$ を, 単位をつけて求めよう.

3. 上の計算の根拠となる事実を，「$W_1, \ldots, W_{10}$ は $\boxed{}$ 分布にしたがう」，と書くとき, 空欄にあてはあまる語句を書こう.

5

過程を紙に

ある 2 変量データ (x, y) について次のことがわかっている.

x の平均値 $\overline{x}$	49
y の平均値 $\overline{y}$	-4
x の分散 s_x^2	36
y の分散 s_y^2	9
x, y の共分散 s_{xy}	-16
(x, y) のデータの個数 n	25

このとき, y を従属変数, x を独立変数として (=授業と同じのりで) 回帰分析を行い, $x = 55$ に対する y の値を予想しよう.

6

過程を紙に

確率変数 X, Y について, $\mathrm{E}[X] = 3, \mathrm{V}[X] = 7, \mathrm{E}[Y] = 10, \mathrm{Cov}[X, Y] = -5$ が成立する. 次の量を求めよう.

1. $\mathrm{E}[-2X + 3]$
2. $\mathrm{V}[-2X + 3]$
3. $\mathrm{E}[X(X + Y)]$
4. $\mathrm{E}[(X - 2)(Y + 3)]$

7

過程を紙に

あるくじは, 確率 0.4 で当たり, 確率 0.6 で外れる. 当たると賞金 13 円もらえ, 外れても賞金 3 円もらえる.

このくじを 50 回引くときの賞金の合計額を確率変数 X(円) とする.

1. $X = 300$(円) となる確率を求めよう. ただし, 組み合わせ ${}_n\mathrm{C}_k$ の記号はつかわず, 階乗 $m!$ で書くこと. べき乗 a^ℓ と分数は簡単化・約分しなくてよい.
2. X の母平均値と母分散を求めよう (単位付きで).

8

過程を紙に

離散型確率変数 X の確率分布は

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}|x| & (-2 \leq x \leq 2, x \text{ は整数}) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

で与えられる.

1. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
2. 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.
3. 確率 $P(X^6 + 2X^2 - 3 = 0)$ を求めよう.

9

過程を紙に

連続型確率変数 X は次の確率密度関数 $f(x)$ に従う.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x^2} & (1 \leq x < 4) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 母期待値 $\mathrm{E}[-3X^2 + 4]$ を求めよう.
2. 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.
3. 確率 $P(|X|^2 < 2)$ を求めよう.

10

過程を紙に

連続型確率変数 X は次の確率密度関数 $f(x)$ に従う.

$$f(x) = \begin{cases} 3 & (0 \leq x < \frac{1}{3}) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

確率変数 Y を, $Y = -3X + 2$ で定める.

1. 母期待値 $\mathrm{E}[\sin(\pi X)]$ を求めよう.
2. 確率 $P(\frac{1}{10} \leq X < +\frac{3}{10})$ を求めよう.
3. 母平均値 $\mathrm{E}[Y]$ を求めよう.
4. 確率 $P(0 \leq Y < \frac{5}{3})$ を求めよう.

確率統計☆演習 I プチテスト略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2017-11-22 水更新: Time-stamp: "2018-01-08 Mon 15:08 JST hig"

これは, 一部の過程のみ記した略解です. 参加者はすべての過程を記す必要があります.

配点 計 100 点.

1

○×○×○

配点 1-5:各 2 点, 計 10 点

2

1. 190cm
2. 4500 位
3. 4/3=1.33

配点 1-3:各 2 点, 計 6 点

3

1. 標準得点 $z = (70 - 80)/20 = -0.5$.
2. 偏差値 $w = z \times 10 + 50 = 45$.
3. $\overline{y} = 100 + 3 \times 80 = 340$.
4. $S_y^2 = 3^2 \times S_x^2 = 3600$.
5. 標準得点は 1 次変換のもとで不変なので, -0.5.

配点 1-5:各 2 点, 計 10 点

4

1 回目から 10 回目の重さを確率変数 $X_1, \dots, X_{10}$ とすると, これらは同分布にしたがい, $\mathrm{E}[X_i] = 120$, $\mathrm{V}[X_i] = 70$ である. $W = \sum_{i=1}^{10} X_i$, $U = \frac{1}{10}W$ である.

1. $\mathrm{E}[W] = \sum_{i=1}^{10} \mathrm{E}[X_i] = 1200$g, $X_1, \dots, X_{10}$ は独立なので, $\mathrm{V}[W] = \sum_{i=1}^{10} \mathrm{V}[X_i] = 700\mathrm{g}^2$.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

2. $\mathrm{E}[U] = \frac{1}{10}\mathrm{E}[W] = 120\mathrm{g}$, $\mathrm{V}[W] = (\frac{1}{10})^2\mathrm{V}[W] = 7\mathrm{g}^2$.
3. 独立同 (分布)

配点　1,2:各 4 点, 3:2 点, 計 10 点.

5

回帰の式は $y + 4 = \frac{-16\sqrt{9}}{\sqrt{36}\sqrt{9}\sqrt{36}} \times (x - 49)$. すなわち $y = -\frac{4}{9}(x - 49) + 4$.
これに $x = 55$ を代入し, $y = \frac{-16\sqrt{9}}{\sqrt{36}\sqrt{9}\sqrt{36}} \times (55 - 49) - 4 = -\frac{20}{3}$.

配点　$y = ax + b$ 2 点, $\hat{y}$ 2 点, 計 4 点.

6

1. $\mathrm{E}[-2X + 3] = -2\mathrm{E}[X] + 3 = -3$.
2. $\mathrm{V}[-2X + 3] = (-2)^2\mathrm{V}[X] = 28$. だいぶ面倒だが $\mathrm{E}[(-2X + 3)^2] - \mathrm{E}[(-2X + 3)]^2$ でも求められる.
3. $\mathrm{E}[X(X + Y)] = \mathrm{E}[X^2] + \mathrm{E}[XY] = (\mathrm{V}[X] + \mathrm{E}[X]^2) + (\mathrm{Cov}[XY] + \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]) = (7 + 3^2) + (-5 + 30) = 41$.
4. $\mathrm{E}[(X-2)(Y+3)] = \mathrm{E}[XY]+3\mathrm{E}[X]-2\mathrm{E}[Y]-6\mathrm{E}[1] = (-5+30)+3{\cdot}3-2{\cdot}10-6{\cdot}1 = 8$.

配点　1-4:各 5 点, 計 20 点

7

50 回引いたときの当たりの回数は確率変数 $Y \sim B(50, 0.4)$. $\mathrm{E}[Y] = 50 \cdot 0.4 = 20$. $\mathrm{V}[Y] = 50 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 12$.
X と Y の関係は, $X = 13Y + 3(50 - Y) = 10Y + 150$ (円).

1. $P(X = 300) = P(Y = 15) = \frac{50!}{15!35!}0.4^{15}0.6^{35}$.
2. $\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[10Y + 150] = 10\mathrm{E}[Y] = 350$ (円), $\mathrm{V}[X] = \mathrm{V}[10Y + 150] = 10^2\mathrm{V}[Y] = 1200$ (円 ^{2}).
   別解.
   n 回めのくじで得られる賞金を W_n とすると, $W_1, \ldots, W_{20}$ は独立同分布にしたがい, $\mathrm{E}[W_i] = 0.4\times13+0.6\times3 = 7$(円), 母分散は, $\mathrm{V}[W_i] = 0.4\times13^2+0.6\times3^2-7^2 = 24$(円 ^{2}).
   $Y = W_1 + \cdots + W_{50}$ だから, $\mathrm{E}[X] = 50 \cdot \mathrm{E}[W_i] = 350$(円). $\mathrm{V}[X] = 50 \cdot \mathrm{V}[W_i] = 1200$(円 ^{2}).

配点　1:4 点, 2:母平均値 3 点, 母分散 3 点, 計 10 点

8

$f(x)$ が偶関数であることに注意する.

1. $f(x)x$ は奇関数なので, $\mathrm{E}[X] = \sum_{x=-2}^{2} \frac{1}{6}|x|x = 0$.
2. $f(x)x^2$ は偶関数なので, $\mathrm{E}[X^2] = \sum_{x=-2}^{2} \frac{1}{6}|x|x^2 = 2\sum_{x=1}^{2} \frac{1}{6}x^3 = \frac{1}{3}(1^3 + 2^3) = 3$.
   $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2 = 3$.
3. $P(X^6 + 2X^2 - 3 = 0) = \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[X^6+2X^2-3=0]}(X)] = \sum_{x=-2}^{2} f(x)\mathbf{1}_{[X^6+2X^2-3=0]}(x) = \frac{1}{6} \cdot |-2| \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot |-1| \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot |+1| \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot |+2| \cdot 0 = \frac{1}{3}$.

配点　1,3:各 3 点, 2:4 点, 計 10 点

9

1. $\mathrm{E}[X^2] = \int_1^4 \frac{4}{3}\frac{1}{x^2} \cdot x^2 \, \mathrm{d}x = 4$. $\mathrm{E}[-3X^2 + 4] = -3\mathrm{E}[X^2] + 4 = -3 \cdot 4 + 4 = -8$.
2. $\mathrm{E}[X] = \int_1^4 \frac{4}{3}\frac{1}{x^2} \cdot x \, \mathrm{d}x = \frac{4}{3}\log 4$.
   $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2 = 4 - \frac{64}{9}(\log 2)^2$.
3. $P(|X|^2 < 2) = \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[|X|^2<2]}(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \times \mathbf{1}_{[|X|^2<2]}(x) \, \mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{4}{3}\frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x = [-\frac{4}{3}\frac{1}{x}]_1^{\sqrt{2}} = \frac{4}{3}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$.

配点　1,3:各 3 点, 2:4 点, 計 10 点

講評　1 の母平均値は重心の位置だから, $1 \leq \mathrm{E}[X] \leq 4$ とならなかったら計算ミスを疑う必要がある.

3 の確率で $\int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}} x^{-2}\mathrm{d}x$ を計算している人は, 広義積分 $2\int_0^{\sqrt{2}} x^{-2} \, \mathrm{d}x$ が収束しないことから, 何かおかしいことに気づいたほうがいい. 微積分の基本定理が成立するのはいつだっけ?

10

$X \sim \mathrm{U}(0, \frac{1}{3})$ である.

1. $\mathrm{E}[\sin(\pi X)] = \int_0^{\frac{1}{3}} 3\sin(\pi x) \, \mathrm{d}x = \frac{3}{\pi}[-\cos(\pi x)]_0^{1/3} = \frac{3}{\pi}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{2\pi}$.
2. $P(\frac{1}{10} \leq X < \frac{3}{10}) = \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[\frac{1}{10}<X<\frac{3}{10}]}(X)] = \frac{3}{5}$.
3. $\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[-3X + 2] = -3\mathrm{E}[X] + 2 = -3 \cdot \frac{0+\frac{1}{3}}{2} = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$.
   別解 $Y \sim U(1, 2)$ なので, $\mathrm{E}[Y] = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$.
4. $P(0 \leq Y < \frac{5}{3}) = \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[0<-3X+2<\frac{5}{3}]}(X)] = \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[\frac{1}{9}<X<\frac{2}{3}]}(X)] = 3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{3}$.
   別解 $Y \sim U(1, 2)$ なので, $\mathrm{E}[Y] = \int_1^{5/3} 1 \, \mathrm{d}y = \frac{2}{3}$.

配点　1,2:各 2 点, 3,4:各 3 点, 計 10 点