多次元の確率分布と独立性

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I L06(2017-11-01 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2017-10-31 Tue 07:53 JST hig"

今日の目標

- 同時分布から周辺分布, 母期待値, 母共分散, 母相関係数が計算できる 西川確率統計 §2.3
- 確率変数の独立性を判定し利用できる 西川確率統計 §1.5.4

http://hig3.net

L05-Q1

Quiz 解答:離散的な確率変数の母平均・母分散・母標準偏差

1. 期待値 $\mathrm{E}[\mathrm{e}^X] = \frac{4}{12}\cdot\mathrm{e}^{-1} + \frac{5}{12}\cdot\mathrm{e}^{0} + \frac{3}{12}\cdot\mathrm{e}^{2}$.
2. 母平均値 $\mathrm{E}[X] = \frac{4}{12}\cdot(-1) + \frac{5}{12}\cdot 0 + \frac{3}{12}\cdot 2 = \frac{1}{6}(=\mu)$.
3. 母分散
   $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[(X-\mu)^2] = \frac{4}{12}\cdot(-1-\frac{1}{6})^2 + \frac{5}{12}\cdot(0-\frac{1}{6})^2 + \frac{3}{12}(2-\frac{1}{6})^2 = \frac{47}{36}$.
4. 母標準偏差 $\sqrt{\mathrm{V}[X]} = \sqrt{\frac{47}{36}}$.
5. 確率 $\mathrm{E}[\mathbf{1}_{[a(X)]}(X)] = \frac{4}{12}\cdot 1 + \frac{5}{12}\cdot 1 + \frac{3}{12}\cdot 0 = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

L05-Q2

Quiz 解答:確率変数の変換

$\mathrm{E}[X^2] = \mathrm{V}[X] + \mathrm{E}[X]^2 = 13.$

1. $\mathrm{E}[-X^2+2X-3] = -\mathrm{E}[X^2] + 2\mathrm{E}[X] - 3\mathrm{E}[1] = -13 + 2\cdot 2 - 3\cdot 1 = -12.$
2. $\mathrm{V}[-2X-3] = \mathrm{V}[-2X] = (-2)^2\mathrm{V}[X] = 36.$

ここまで来たよ

1. 離散型確率変数
2. 多次元の確率分布と独立性
   - 2 次元の確率分布
   - 母共分散
   - 独立性

2 つの離散型確率変数の同時分布 高校 数学 B

例 6 枚のカードから無作為に 1 枚引く. ♡7 ♡8 ♡9 ◇8 ♠9 ♣9
2 つの離散型確率変数の同時分布
$X=$ 数, $Y=0$(赤札), 1(黒札) とすると (x,y) を得る確率は 2 変数の確率関数で書ける. 同時分布, 結合分布, joint distribution という.

$$f_{\mathrm{XY}}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{3} & ((x,y)=(8,0))\\ \frac{1}{6} & ((x,y)=(9,0))\\ \frac{1}{3} & ((x,y)=(9,1))\\ \frac{1}{6} & ((x,y)=(7,0))\\ 0 & (\text{他})\end{cases}$$

表で書いた方がまし. ここでは, 「他」は省略.

$y\backslash x$	7	8	9	計
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	
1	0	0	$\frac{1}{3}$	
計				

周辺分布

確率変数の周辺分布

同時分布 $f_{\mathrm{XY}}(x, y)$ に対して,
X の周辺分布 $f_{\mathrm{X}}(x)$, Y の周辺分布 $f_{\mathrm{Y}}(y)$ は,

$$\text{離散型}\ f_{\mathrm{X}}(x) = \sum_{y} f_{\mathrm{XY}}(x, y), \quad f_{\mathrm{Y}}(y) = \sum_{x} f_{\mathrm{XY}}(x, y),$$

要するに $\boxed{}$

同時分布が与えられたときの母期待値高校 数学 B

同時分布が与えられたときの母期待値

離散型　$$\mathrm{E}[\phi(X,Y)] = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \sum_{y=-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{XY}}(x,y) \cdot \phi(x,y)$$

L06-Q1

Quiz(多次元の確率変数の期待値)

2 変数 X, Y の離散型確率分布を考える．同時分布 $f_{\mathrm{XY}}(x, y)$ が下の表で与えられる．

$y \backslash x$	1	2	3
0	0	2/12	1/12
2	4/12	0	5/12

1. 母期待値 $\mathrm{E}[X+2Y]$ を求めよう．
2. 母期待値 $\mathrm{E}[\mathbf{1}_{[Y\geq 1]}(X,Y)]$ を求めよう．
3. 周辺分布 $f_{\mathrm{X}}(x)$, $f_{\mathrm{Y}}(y)$ を求めよう．

2 次元の確率分布の母期待値の性質 高校 数学 B 西川確率統計定理 2.7(p.48)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\phi_1(X,Y)+\phi_2(X,Y)] =& \mathrm{E}[\phi_1(X,Y)]+\mathrm{E}[\phi_2(X,Y)] \\
\text{特に } \mathrm{E}[X+Y] =& \mathrm{E}[X]+\mathrm{E}[Y]
\end{aligned}
$$

なぜなら,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X+Y] =& \sum_x \sum_y f_{\mathrm{XY}}(x,y)\cdot(x+y) \\
=& \sum_x \sum_y f_{\mathrm{XY}}(x,y)\cdot x + \sum_x \sum_y f_{\mathrm{XY}}(x,y)\cdot y \\
=& \mathrm{E}[X]+\mathrm{E}[Y].
\end{aligned}
$$

X だけ, Y だけの関数の母期待値

x だけ, y だけの関数の母期待値は,

下の左辺= $\boxed{}$ で計算しても

下の右辺= $\boxed{}$ で計算しても

同じ.

$$\mathrm{E}[\phi(X)] = \sum_x \sum_y f_{\mathrm{XY}}(x,y)\cdot\phi(x) = \sum_x \phi(x) \sum_y f_{\mathrm{XY}}(x,y) = \sum_x \phi(x)\cdot f_{\mathrm{X}}(x)$$

$$\mathrm{E}[\phi(Y)] = \sum_y \sum_x f_{\mathrm{XY}}(x,y)\cdot\phi(y) = \sum_y \phi(y) \sum_x f_{\mathrm{XY}}(x,y) = \sum_y \phi(y)\cdot f_{\mathrm{Y}}(y)$$

ここまで来たよ

1. 離散型確率変数

2. 多次元の確率分布と独立性
   - 2 次元の確率分布
   - 母共分散
   - 独立性

母共分散 高校 数学 B 西川確率統計定義 2.9(p.57)

母共分散 covariance

X, Y が確率変数で, $\mu_{\mathrm{X}} = \mathrm{E}[X], \mu_{\mathrm{Y}} = \mathrm{E}[Y]$ であるとき, 母共分散 $\mathrm{Cov}[X, Y]$ (西川確率統計 $C(X, Y)$) を次で定義.

$$\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathrm{E}[(X - \mu_{\mathrm{X}})(Y - \mu_{\mathrm{Y}})]$$

$=$ 西川確率統計問題 2.10(p.58) $\cdots = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X] \times \mathrm{E}[Y].$

母相関係数 correlation

X, Y が確率変数であるとき, 母相関係数を次で定義.

$$\rho[X, Y] = \frac{\mathrm{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\mathrm{V}[X]}\sqrt{\mathrm{V}[Y]}}$$

$-1 \leq \rho[X, Y] \leq 1$ が成立.

L06-Q2

さっきの問で母共分散は?

L06-Q3

Quiz(独立と限らない確率変数の母期待値)

確率変数 X, Y を考える.
$\mathrm{E}[X] = 2, \mathrm{E}[Y] = 3, \mathrm{V}[X] = 5, \mathrm{V}[Y] = 11, \mathrm{Cov}[X, Y] = 7$ である.

1. $\mathrm{E}[-2X + 3Y]$ を求めよう.
2. $\mathrm{V}[-2X + 3Y]$ を求めよう.

ここまで来たよ

1. 離散型確率変数
2. 多次元の確率分布と独立性
   - 2 次元の確率分布
   - 母共分散
   - 独立性

独立性 高校 数学 B 西川確率統計 §1.5.4

独立性

確率変数 X, Y が同時分布 $f_{\mathrm{XY}}(x, y)$ を持つとする.
X, Y が独立とは,

$$f_{\mathrm{XY}}(x, y) = f_{\mathrm{X}}(x) \times f_{\mathrm{Y}}(y)$$

が成立することをいう (世の中には, 同値な定義が多数).

X, Y が独立とは, X, Y が互いに $\boxed{}$
事象 A, B が独立 $\Leftarrow P(A$ かつ $B) = P(A) \times P(B)$ 西川確率統計 §1.5.3 の特別な場合.

独立性と母共分散 西川確率統計注意 2.10(p.57)

X, Y が独立なとき, 母共分散 $\mathrm{Cov}[X, Y] = 0$.

すぐ後で証明.

母共分散 $\mathrm{Cov}[X, Y] = 0$ は, X, Y が独立であるための $\boxed{}$ 条件.

L06-Q4

Quiz(2 つの離散型確率変数の母期待値・母平均値・母共分散・確率・独立性)

離散型確率変数 X, Y の同時分布は次の表で与えられる.

$y \backslash x$	1	3
2	1/7	2/7
4	0	4/7

で与えられる.

1. X, Y が独立かどうか判定しよう.
2. 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.
3. 母共分散 $\mathrm{Cov}[X, Y]$ を求めよう.

L06-Q5

Quiz(離散型確率変数の独立性)

2 次元の離散型確率変数 (X, Y) を考える．同時分布 $f_{\mathrm{XY}}(x, y)$ は次の表で与えられる (現れない X, Y の確率は zero である).

$y \backslash x$	2	3
3	2/12	1/12
7	A	B

X, Y が独立になるように, 実数 A, B を定めよう.

X, Y が独立のときだけに成立する性質

西川確率統計定理 2.13(p.57)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\phi_1(X) \times \phi_2(Y)] =& \mathrm{E}[\phi_1(X)] \times \mathrm{E}[\phi_2(Y)] \\
\text{特に } \mathrm{E}[XY] =& \mathrm{E}[X] \times \mathrm{E}[Y] \\
\text{特に } \mathrm{Cov}[X, Y] =& (\mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X] \times \mathrm{E}[Y] =)0 \\
\text{Cov=0 のときに } \mathrm{V}[X+Y] =& \mathrm{V}[X] + \mathrm{V}[Y]
\end{aligned}
$$

西川確率統計定理 2.9(p.49)

西川確率統計定理 4.2(p.85)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[XY] &= \sum_x \sum_y f_{\mathrm{XY}}(x, y) \cdot x \cdot y \\
&= \sum_x \sum_y f_{\mathrm{X}}(x) \times f_{\mathrm{Y}}(y) \times x \times y \\
&= \sum_x f_{\mathrm{X}}(x) \cdot x \times \sum_y f_{\mathrm{Y}}(y) \cdot y = \mathrm{E}[X] \times \mathrm{E}[Y] \\
\mathrm{V}[X+Y] =& \mathrm{E}[(X+Y)^2] - \mathrm{E}[X+Y]^2 \\
=& \mathrm{E}[X^2] + 2\mathrm{E}[XY] + \mathrm{E}[Y^2] - (\mathrm{E}[X]^2 + 2\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y] + \mathrm{E}[Y]^2) \\
=& \mathrm{V}[X] + 2\mathrm{Cov}[X, Y] + \mathrm{V}[Y]
\end{aligned}
$$

L06-Q6

Quiz(独立な確率変数の母期待値)

独立な確率変数 X, Y を考える.
$\mathrm{E}[X]=2, \mathrm{E}[Y]=3, \mathrm{V}[X]=5, \mathrm{V}[Y]=11$ である.

1. $\mathrm{E}[(-2X+3Y)(X+5Y)]$ を求めよう.
2. $\mathrm{V}[-2X+3Y]$ を求めよう.

L06-Q7

西川確率統計例題 2.3(p.50)

L06-Q8

西川確率統計演習 2.4(p.59)

L06-Q9

西川確率統計演習 2.5(p.59)

連絡

- 2017-11-22 水 1 プチテスト．教室 1-609．出題計画は別紙 (一部の (数学的) 問題の PC による回答あり．Excel の使い方の問題は出題しません)．
- 2017-11-08 水 5 数理情報学科 3 年生向け特別研究 (卒業研究) 履修説明会=研究室配属．
- 2017-11-08 水 1 教室変更あるかも．
- 配布資料は 1-503 向かいの引出, `http://hig3.net` で再配布．
- 加減乗除と平方根 (ルート) の使える電卓持ってきてね．関数電卓でなくてもいいです．携帯電話の機能・アプリでもかまいません．
- 樋口オフィスアワー月 3.5(1-539) 金 4(1-502), Math ラウンジ月-木昼