連続型確率変数

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I　L08(2017-11-15 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2017-11-14 Tue 18:39 JST hig"

今日の目標

- 西川確率統計 §3　高校 数学 B
- 連続型確率変数の確率, 母平均値, 母分散, 母期待値が計算できる
- 一様分布を例に, 母平均値・母分散・変数変換の意味が説明できる

http://hig3.net

L07-Q1

L07-Q2

Quiz 解答:二項分布

1. 二項分布 $\mathrm{B}(100, \frac{2}{3})$ に従う確率変数を X とする．$P(X = 40)$ を求めればいいから，${}_{100}\mathrm{C}_{40} p^{40}(1-p)^{100-40} = \frac{100!}{40!60!}(\frac{2}{3})^{40}(1-\frac{2}{3})^{60}$.
2. $\mathrm{E}[X] = n \times p = \frac{200}{3}$. $\mathrm{V}[X] = n \times p(1-p) = \frac{200}{9}$.

L07-Q3

Quiz 解答:ベルヌーイ分布

1. ベルヌーイ分布 $\mathrm{B}(1, 0.05)$ に従う確率変数を X とすると，
$Y = 1000X$.
2. $\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[1000X] = 1000\mathrm{E}[X] = 1000p = 50.$(円)
$\mathrm{V}[Y] = \mathrm{V}[1000X] = 1000^2\mathrm{V}[X] = 1000^2 p(1-p) = 47500.$ (円 ^{2})

L08-Q4

Quiz 解答:独立同分布にしたがう変数の和

母平均値と母分散は, $\mathrm{E}[aX+bY+c]=a\mathrm{E}[X]+b\mathrm{E}[Y]+c$, 独立分布の $\mathrm{V}[aX+bY+c]=a^2\mathrm{V}[X]+b^2\mathrm{V}[Y]$ の式を繰り返し使えば求められる.

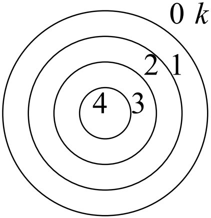
1. A は母平均値が 3, 母分散が $\frac{7}{100}$.
2. B は母平均値が 0, 母分散が 7.
3. C は母平均値が 0, 母分散が 1.

ここまで来たよ

1. 二項分布・大数の法則
2. 連続型確率変数
   - 連続型確率変数
   - 一様分布

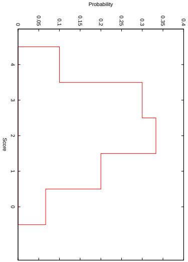
あるプレイヤーのダーツの得点確率

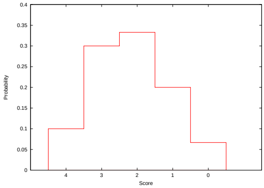
得点: 的の真ん中から順に $4, 3, 2, 1, 0$ 点



離散型確率分布

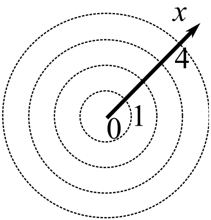
得点 s	確率関数 $f(s)$
4	0.1
3	0.3
2	0.3333
1	0.2
0	0.0667

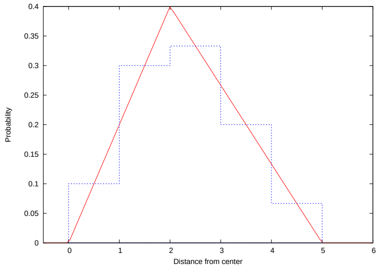




中心から x cm にあてる確率

的の真ん中からの距離 x cm, 得点 $s = 4 - x$ 点 (実数).





$r = 0.5$cm と 0.9 cm への当たりやすさは違う. $r = 1.0$cm を境に急に変わるわけじゃない. これを表現したい.

$\rightsquigarrow$ 点数の出やすさは x のある関数 $f(x)$ で表される!

連続型確率変数 連続型確率分布

連続型 確率密度関数 $f(x)$ (x は実数)

離散型 確率関数 $f(x)$ (x は整数またはとびとびの値)

連続型確率変数 西川確率統計 §3.1

連続型確率変数

連続型確率変数 X とは, 実数値をとり, 確率が確率密度関数 $f(x)$ で指定されるもの.

離散的

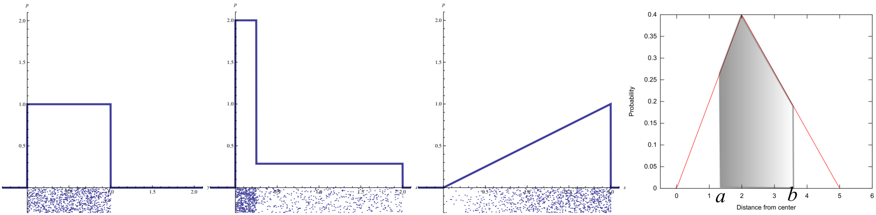
得点 x	確率 $f(x)$
0	0.1
1	0.3
$\vdots$	
x	$f(x)$

連続的

-
- $0 \leq f(x)$ である. $f(x) \leq 1$ とは限らない.

物理・工学系では $p(x)$ と書いたら確率密度関数 $f(x)$ を意味することも

確率密度関数の例



確率密度関数と確率

$$P(a \leq X < b) = (\text{あとで}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad (\text{下側面積})$$

連続型確率変数の母期待値

母期待値の定義

離散型確率変数 $\mathrm{E}[\phi(X)] = \sum_x f(x) \cdot \phi(x)$

連続型確率変数 $\mathrm{E}[\phi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \phi(x) \, \mathrm{d}x$

$\lim_{\text{分割}\to\text{細かく}} \sum_i f(x_i)\Delta x = \int f(x) \, \mathrm{d}x$ だから自然.

- 離散型と同じ定義: 母平均値 $\mu = \mathrm{E}[X]$, 母分散 $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[(X-\mu)^2]$
- $\mathrm{E}[aX+b] = a\mathrm{E}[X] + b$ 成立
- $\mathrm{V}[aX+b] = a^2\mathrm{V}[X]$ 成立
- $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2$ 成立 西川確率統計定理 2.12(p.54)

L08-Q1

Quiz(連続的な値をとる確率変数)

次の確率密度関数を持つ確率変数 X を考える.

$$f(x) = \begin{cases} 8x & (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

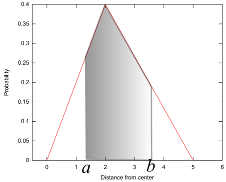
1. $X \geq +\frac{1}{4}$ となる確率を求めよう.
2. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.
4. 母期待値 $\mathrm{E}[\frac{1}{\sqrt{X}}]$ を求めよう.

西川確率統計 §3.2

確率密度関数から事象の確率を求める

$$
\begin{aligned}
P(\text{事象}) = P(\text{条件}) &= \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[\text{条件}]}(X)] \\
P(a \le X < b) &= \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[a \le X < b]}(X)] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathbf{1}_{[a \le X < b]}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \boxed{} \\
\text{全事象の確率} = 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{E}[1]
\end{aligned}
$$

じゃあ, ちょうど距離 $x = a$ cm となる確率は? $\rightsquigarrow \boxed{}$.



$$
\mathbf{1}_{[X\text{ の条件}]}(x) = \begin{cases} 1 & (x\text{ が条件を満たす}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}
$$

L08-Q2

Quiz(連続型確率変数)

次の確率密度関数を持つ確率変数 X を考える.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x & (0 \leq x < 2) \\ \frac{1}{2} & (2 \leq x < 3) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
2. 確率 $P(X \geq 1)$ を求めよう.
3. 母期待値 $\mathrm{E}[\frac{1}{X}]$ を求めよう.

ここまで来たよ

1. 二項分布・大数の法則
2. 連続型確率変数
   - 連続型確率変数
   - 一様分布

一様分布 西川確率統計定義 3.4(p.66)

一様分布 $\mathrm{U}(a,b)$

確率変数 X の確率密度関数が次で与えられるとき, X は区間 $[a,b)$ の一様分布 $\mathrm{U}(a,b)$ に従うという.

$$f(x) = \begin{cases} C(\text{定数}) & (a \leq x < b) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

L08-Q3

Quiz(一様分布)

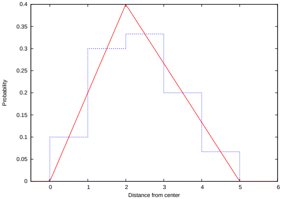
連続型確率変数 X が一様分布 $\mathrm{U}(a,b)$ にしたがう.

1. C を求めよう.
2. $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. $\sqrt{\mathrm{V}[X]}$ を求めよう.

連続型確率変数の母平均値と母分散の直観的意味

チェビシェフの不等式大数の法則

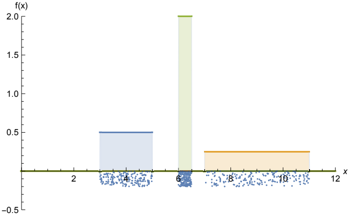
$f(x)$ のグラフ



$Y = aX + b$ の意味

X が 一様分布 $\mathrm{U}(r, s)$ にしたがうとき，
$Y = aX + b$ は 一様分布 $\mathrm{U}(ar + b, as + b)$ にしたがう．

$\mathrm{E}[aX + b] =$
$\sqrt{\mathrm{V}[aX + b]} =$



左から $X \sim \mathrm{U}(3, 5)$, $Z = \frac{1}{4}X + \frac{21}{4}$, $Y = 2X + 1$.

連絡

- 配布資料は 1-503 向かいの引出, `http://hig3.net` で再配布.
- 加減乗除と平方根 (ルート) の使える電卓持ってきてね. 関数電卓でなくてもいいです. 携帯電話の機能・アプリでもかまいません.
- 樋口オフィスアワー月 3.5(1-539) 金 4(1-502), Math ラウンジ月-木昼 (1-614)

プチテスト計画

プチテスト 2017-11-22 水. 1-609 実習室. 30 ピーナッツ.
以下の出題計画は最終的なものではありません. 2017-11-16 木に修正, 確定します. 一部の (数学的) 問題の PC(Moodle) による回答あり. Excel の使い方の問題は出題しません.

- データやグラフから平均値, 分散, 共分散, 標準偏差, 四分位数, 四分位範囲などを求めその意味を解釈する (L02)
- データやグラフや平均値分散から標準得点, 偏差値を求め, その意味を解釈する (文章題) (L03)
- データやグラフや平均値分散などから 相関係数, 回帰係数, 回帰直線を求めその意味を解釈する (L04, レポート)
- 1 次元の離散型確率変数について, 確率分布から確率, 母期待値, 母平均値, 母分散, 母標準偏差を求める $\times n$ 問 (L05)
- 確率変数の 1 次式や 2 次式について, 母平均値, 母分散から, 母平均値, 母分散, 母標準偏差を求める (L05,L06)
- 2 次元の離散型確率分布について, 同時分布, 周辺分布, 母期待値, 母分散, 母共分散, 独立性から母期待値, 母共分散, 母相関係数を求める (L06)
- 二項分布の確率, 母平均値, 母分散の式を利用して, 確率変数の母平均値, 母分散, 母期待値を求める (L07)
- 独立同分布に従う確率変数 X_i の和 W について, X の情報から, W の母平均値, 母分散を求める (L05,L07)
- 連続型確率変数について, 確率密度関数から確率, 母期待値, 母平均値, 母分散, 母標準偏差を求める $\times n$ 問 (L08)

おすすめの準備方法 出題範囲や方式は毎年変わるので, 過去問題 (公開) 中心の準備はおすすめしません. 上の出題計画を参照して, 今年度の trial や準備問題を中心に準備することをおすすめします. Learn Math Moodle の準備問題は, 点数はこれまでの最高点で固定されてますが, 練習のための再受験が可能です.