中心極限定理・母集団と標本抽出

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I L10(2017-12-06 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2017-12-06 Wed 12:08 JST hig"

今日の目標

- 中心極限定理の意味が説明でき, 確率の近似計算に利用できる. 西川確率統計 §4.2

http://hig3.net

L09-Q1

Quiz 解答:標準正規分布の確率

標準正規分布の確率密度関数は偶関数 ($z = 0$ に関して対称) なので,

$$P(Z < -2) = \int_{-\infty}^{-2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{+2}^{+\infty} f(z)\,\mathrm{d}z = Q(2) = 0.0228.$$

L09-Q2

Quiz 解答:標準正規分布の確率

確率密度関数が偶関数であることに注意する.

1. $\mathrm{E}[Z^2] = \mathrm{V}[Z] + (\mathrm{E}[Z])^2 = 1 - 0^2$.
2. $P(-0.56 < Z < +1.23) = \int_{-0.56}^{1.23} f(z)\,\mathrm{d}z =$
   $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{-\infty}^{-0.56} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{1.23}^{\infty} f(z)\,\mathrm{d}z =$
   $1 - Q(1.23) - Q(0.56) = 1 - 0.1093 - 0.2877 = 0.6030.$

L09-Q3

Quiz 解答:正規分布の確率

定義にしたがって積分しても求まるが, 正規分布の確率密度関数と比較すると, $X \sim \mathrm{N}(4, 3^2)$ なので,

1. $\mathrm{E}[X] = 4.$
2. $\mathrm{V}[X] = 3^2.$

L09-Q4

Quiz 解答:正規分布の確率

$Z = \frac{X-3}{2}$ とすると, Z は標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ にしたがう.

1. $P(X \geq 5) = P(Z \geq \frac{5-3}{2}) = \int_1^\infty f(z)\,\mathrm{d}z.$
   $\int_1^\infty f(z)\,\mathrm{d}z = Q(1.00) = 0.1587.$
   $\int_1^\infty f(z)\,\mathrm{d}z = \int_1^0 f(z)\,\mathrm{d}z + \int_0^\infty f(z)\,\mathrm{d}z = -I(1.00) + \frac{1}{2}.$

2. $Z = \frac{X-3}{2}$ とすると, Z は標準正規分布にしたがう.
$P(1 \leq X \leq 7) = P(-1 \leq Z \leq 2) = \int_{-1}^{2} f(z)\,\mathrm{d}z.$
$\int_{-1}^{2} f(z)\,\mathrm{d}z = 1 - Q(2.00) - Q(1.00) = 0.8186.$
$\int_{-1}^{2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{0}^{1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{0}^{2} f(z)\,\mathrm{d}z = I(1) + I(2) = 0.8186.$

ここまで来たよ

1. 正規分布

2. 中心極限定理・母集団と標本抽出
   - 中心極限定理と正規近似
   - 母集団と標本
   - 母平均値・母分散の (点) 推定
   - 母比率とその (点) 推定

独立同分布の復習

西川確率統計定理 4.1(p.84) | 確率統計☆演習 I(2017)L07

$X_1, \ldots, X_n$ が独立同分布に従うとする. $\mathrm{E}[X_i] = \mu, \mathrm{V}[X_i] = \sigma^2$.

新しい確率変数: $U_n = X_1 + \cdots + X_n$

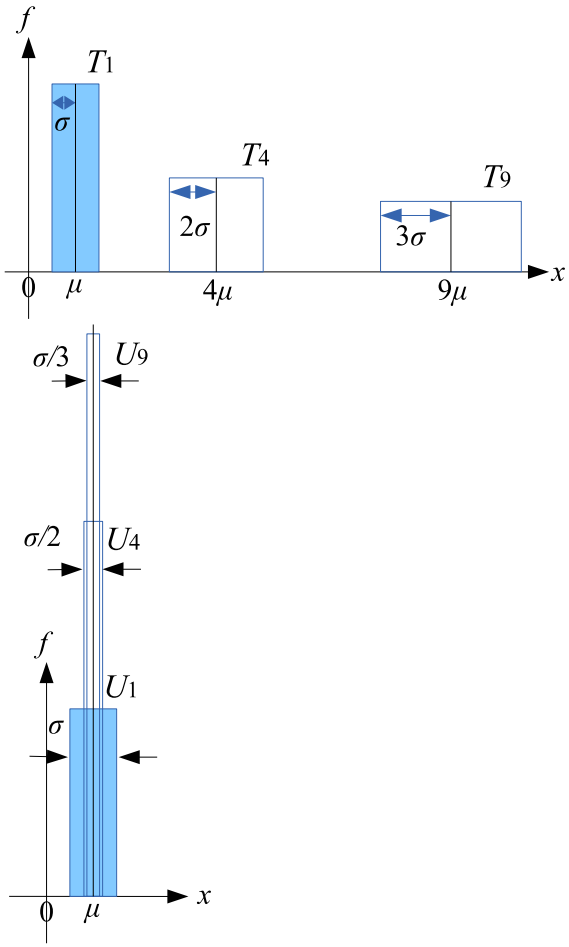
$$\mathrm{E}[U_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i] = n \times \mu.$$

$$\mathrm{V}[U_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}[X_i] = n \times \sigma^2.$$

新しい確率変数: $W_n = \frac{1}{n} U_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$

$$\mathrm{E}[W_n] = \mathrm{E}\left[\frac{1}{n} U_n\right] = \frac{1}{n} \times n \times \mu.$$

$$\mathrm{V}[W_n] = \mathrm{V}\left[\frac{1}{n} U_n\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \times n \times \sigma^2.$$

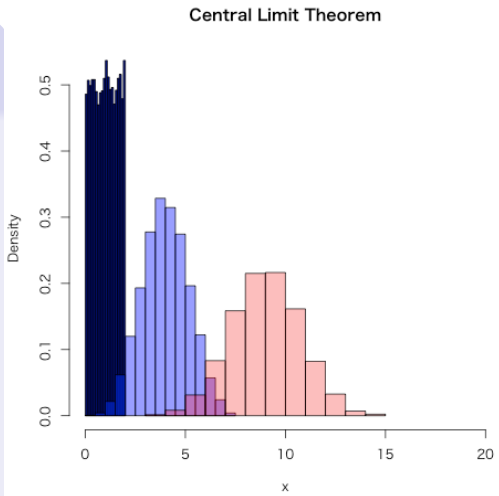


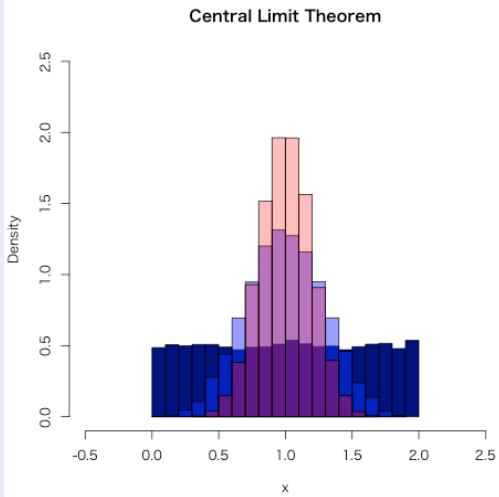
中心極限定理 西川確率統計 §4.2

中心極限定理 (いいかげんバージョン)

$X_1, \ldots, X_n$ が母平均値 μ, 母分散 σ^2 の独立同分布に従うとき, $n \to +\infty$ で

- $U_n = X_1 + \cdots + X_n$, の確率分布は,
  の［　　］に似る
- $W_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ の確率分布は,
  ［　　］に似る
- $Z_n = \frac{W_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ の確率分布は,
  ［　　］に似る





中心極限定理 (厳密バージョン)

西川確率統計定理 4.3(p.87)

確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が, 母平均値 μ, 母分散 σ^2 の独立同分布に従うとする. 正規分布じゃない. どんな分布でも可

$Z_n = \dfrac{\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)-\mu}{\sigma} \times \sqrt{n}$ とすると,
Z_n は, $n \to +\infty$ の極限で, $\mathrm{N}(0, 1^2)$ に従う. すなわち

$$\lim_{n\to+\infty} P(a \le Z_n < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\, \mathrm{d}x$$

「Z_n は $\mathrm{N}(0, 1^2)$ にしたがう Z に法則収束する」

法則収束とは, 関数列がある関数に収束すること.

証明

$\mathrm{E}[Z_n] = 0, \mathrm{V}[Z_n] = 1$ はすぐわかるが…
モーメント母関数を使うと瞬殺

確率統計☆演習 II()L

二項分布の正規近似 高校 数学 B 西川確率統計 §8.4 I

L10-Q1

Quiz(二項分布と正規分布と中心極限定理)

表が確率 $\frac{1}{10}$, 裏が確率 $\frac{9}{10}$ ででるコインを, 400 回投げるとき, 表がでる回数を確率変数 U とする.

1. U はどのような二項分布にしたがうか. $\mathrm{B}(?,?)$ の形で答えよう.
2. U は近似的にどのような正規分布にしたがうか. $\mathrm{N}(?,?)$ の形で答えよう.
3. 表が 31 回より多くでる確率を, 標準正規分布の上側確率 $Q(z)$ を用いて表し, さらに正規分布表を用いて小数値として近似的に求めよう.

実験 (あとでいう U_1, U_4, U_9 の標本抽出)

$X_n \sim \mathrm{B}(1, \frac{2}{3})$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & (x = 1) \quad \text{サイコロで} \boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6} \\ \frac{1}{3} & (x = 0) \quad \text{サイコロで} \boxed{1}\boxed{2} \end{cases}$$

記入欄 $U_n = X_1 + \cdots + X_n$.

n		**1**	2	3	**4**	5	6	7	8	**9**
目	(1–6)									
X_n	(0–1)									
U_n	(0–9)	*			*					*

`https://manaba.ryukoku.ac.jp` に送信.

ここまで来たよ

1. 正規分布

2. 中心極限定理・母集団と標本抽出
   - 中心極限定理と正規近似
   - 母集団と標本
   - 母平均値・母分散の (点) 推定
   - 母比率とその (点) 推定

母集団と標本 (1) 有限母集団

西川確率統計 §6.1

AKB48 の身長ふたたび

- AKB48 メンバー全員 ($\to$ 有限母集団) の身長 x_i の平均値 $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ を求めたい!
  - メンバー 1 名を等確率で選んでくる, という試行を考えると, 確率変数 X の母平均値 $\mathrm{E}[X]$.
- メンバー全員分のデータがあれば定義の式使うだけ
- 握手会でメンバー 1 人ずつに質問しなければいけないとしたら?
- 握手会参加券 74 枚集めないで何とかすませたい.

$\rightsquigarrow$ 質問できたメンバー 5 人の身長 (=標本) から推定したい.

5 人を ‘無作為に’ 選ぶ (=標本抽出する)

母集団サイズ=[　　], 標本サイズ=[　　], 標本の個数=[　　].

母集団と標本 (2) 離散 or 連続型確率変数

賞金額, 個数が謎のスピードくじ (引いて賞金額を見た後で箱に戻す).
賞金額 X は離散型確率変数 $\to$ 無限母集団 (何回でもひけるから).

- 賞金の母平均値 $\mathrm{E}[X] = \sum_x f(x) \times x$ を求めたい.
- くじの中を見れば ($f(x)$ の式を知れば定義の式使うだけ)
- しかし, 中を見ることはできない.
- $+\infty$ 回くじを買わず, 何とかすませたい.

$\rightsquigarrow$ 引いた 5 枚のくじの賞金額 (=標本) から推定したい.
5 枚を '無作為に' 選ぶ (=標本抽出する).
母集団サイズ=[　　], 標本サイズ=[　　], 標本の個数=[　　].

母集団・標本抽出・推定 西川確率統計 §6.1,6.2

- 母集団 population =考えたい集団. どんな分布, 母平均値, 母分散, などわかっていないことがあるが, 全体を調べるわけにはいかない集団.
- 標本 sample (名詞) =母集団から ‘無作為に’ とってきた一部分
- 標本抽出 する sample(動詞)=母集団から ‘無作為に’ とってくる $\rightsquigarrow$ sampling (動名詞)
- 推定 する estimate(動詞) =標本を調べて母集団について正しそうな事実を見つける $\rightsquigarrow$ estimation (名詞)

推定には誤差あるかも. 標本の選び方ごとに答は違うし.

ここまで来たよ

1. 正規分布

2. 中心極限定理・母集団と標本抽出
   - 中心極限定理と正規近似
   - 母集団と標本
   - 母平均値・母分散の (点) 推定
   - 母比率とその (点) 推定

母平均値の (点) 推定 高校 数学 B

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ はサイズ n の標本.
各 X_i $(i = 1, \ldots, n)$ は母平均値 $\mu = \mathrm{E}[X_i]$, 母分散 $\sigma^2 = \mathrm{V}[X_i]$ の独立同分布にしたがう確率変数.
μ, σ^2 は母集団のパラメタ.

標本平均値 西川確率統計 p.132

$$\text{標本平均値 } \overline{X}_{(n)} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) = \text{先週の } W_n$$

が, 母平均値 μ の 'よい' 推定値になっている.

母平均値は μ はひとつに定まっているが, 標本平均値 $\overline{X}_{(n)}$ は確率変数であり, 試行=標本抽出のたびにかわる ($\overline{X}_{(n)}$ は確率分布をもつ)

L10-Q2

Quiz(母平均値, 母分散, 母比率の点推定)

フライドチキン屋さんのフライドチキンの大量の在庫 (=母集団) から, 無作為に 6 本のチキンを取り出したところ, 重さは次のようだった.

$117\mathrm{g}, \quad 109\mathrm{g}, \quad 109\mathrm{g}, \quad 119\mathrm{g}, \quad 100\mathrm{g}, \quad 112\mathrm{g}.$

1. 重さの母平均値を点推定しよう.
2. 重さの母分散を点推定しよう.
3. 110g 以上のものの母比率を点推定しよう.

よい推定値って?

西川確率統計定理 6.1(p.132)

標本平均値 $\overline{X}_{(n)}$ は不偏性を持つ

「標本平均値 $\overline{X}_{(n)}$」の母平均値=X_i の母平均値

先週の $\mathrm{E}[W_n] = \mu$

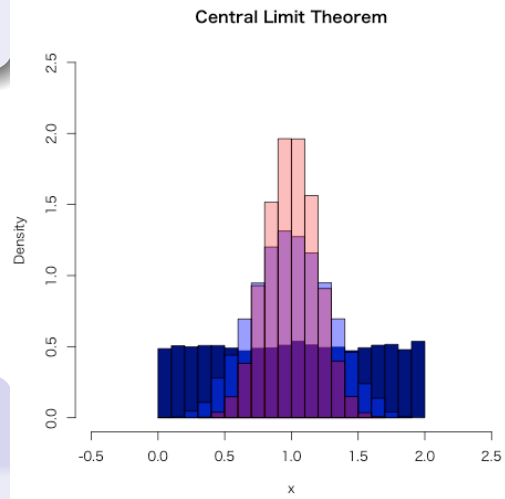
$$\forall n \qquad \mathrm{E}[\overline{X}_{(n)}] = \mu$$

標本平均値 $\overline{X}_{(n)}$ は一致性を持つ

標本サイズ n が大きくなると, $\overline{X}_{(n)}$ と母平均値 μ が離れている確率は 0 に近づく.

大数の (弱) 法則

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \lim_{n \to +\infty} P(|\overline{X}_{(n)} - \mu| > \epsilon|) \to 0$$



母分散の (点) 推定 高校 数学 B 西川確率統計 p.134

不偏標本分散 西川確率統計不偏分散 (p.134) であって標本分散 (p.134) と別

$$\text{不偏標本分散 } s^2 = \frac{1}{n-1}\left[(X_1-\overline{X})^2+\cdots+(X_n-\overline{X})^2\right]$$
$$= \frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_i X_i^2 - \left(\overline{X}\right)^2\right]$$

が, 母分散の 'よい' 推定値になっている.
ここで, $\overline{X}$ は母平均値でなく, 上の標本平均値 ($\overline{X}_{(n)}$ の略記).

$n-1$ の理由 こうするとちょうど不偏: $\mathrm{E}[s^2]=\sigma^2$.
直観的理由 $\overline{X}$ は X_i の重心だから, $(X_i-\overline{X})^2$ は $(X_i-\mu)^2$ より小さくなりがち ($\frac{n-1}{n}$ 倍) なので修正.

おぼえ方 (不偏) 標本分散は $n=1$ のとき,

$\mathrm{E}[s^2] = \sigma^2$ を $n = 2$ のときに確認 (証明 西川確率統計定理 6.2,6.3)

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} =& \frac{1}{2-1}\mathrm{E}[(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2] \\
=& \mathrm{E}[X_1^2 + X_2^2 - 2(X_1 + X_2)\overline{X} + 2\overline{X}^2] \\
=& \mathrm{E}[X_1^2 + X_2^2 - 2\overline{X}^2] \\
=& \mathrm{E}[X_1^2] + \mathrm{E}[X_2^2] - 2\mathrm{E}[\overline{X}^2]
\end{aligned}
$$

ここで,

$\sigma^2 = \mathrm{V}[X_1] = \mathrm{E}[X_1^2] - (\mathrm{E}[X_1])^2 = \mathrm{E}[X_1^2] - \mu^2$,

$\frac{\sigma^2}{n} = \mathrm{V}[\overline{X}] = \mathrm{E}[\overline{X}^2] - (\mathrm{E}[\overline{X}])^2 = \mathrm{E}[\overline{X}^2] - \mu^2$, より,

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} =& (\mu^2 + \sigma^2) + (\mu^2 + \sigma^2) - 2(\mu^2 + \frac{\sigma^2}{2}) \\
=& \sigma^2 \\
=& \text{右辺}
\end{aligned}
$$

ここまで来たよ

1. 正規分布

2. 中心極限定理・母集団と標本抽出
   - 中心極限定理と正規近似
   - 母集団と標本
   - 母平均値・母分散の (点) 推定
   - 母比率とその (点) 推定

比率=ratio

西川確率統計 §7.5.1,8.4

確率変数 $Y \sim \mathrm{B}(1,p)$ ベルヌーイ分布, を考える.
こういう Y は, いろんな母集団を, 条件「…である」の成立不成立で 2 つに類別して作れる. カテゴリ変数

- $X \sim$ ある分布, $Y = \mathbf{1}_{[\cdots\text{である}]}(X)$, たとえば $X > 10$ なら $Y = 1$ とか.
- 母集団=日本国民, 国民 x の血液型が A である $Y = 1$.

母比率

$\mathrm{B}(1,p)$ の p. または母集団で条件 $f(x)$ から $\mathrm{B}(1,p)$ を作ったとき, '母集団の「…である」ものの母比率', ともいう.
有限母集団なら,

$$\text{母集団の「…である」母比率 } p = \frac{\text{「…」であるデータ } x \text{ の個数}}{\text{母集団サイズ}} = \mathrm{E}[Y]$$

やりたいこと:母比率の推定

ベルヌーイ分布の p (母比率) を標本から推定したい!

- クラスの中で, 血液型 A 型の人の比率は? n 人に質問しただけで推定したい.
- 候補者 A の得票率は何% ? n 人に質問しただけで推定したい.
- 工場から出荷する製品のうち, 何% が不良品? n 個だけ抜き出して調査したい.
- このコインの表が出る確率は? n 回投げるだけで推定したい.

母比率の (点) 推定

標本比率

標本のデータ n 個中 k 個が「…」であるとき,

$$\text{標本比率 } \hat{p} = \frac{k}{n}$$

が「…」の母比率 p のよい推定値になっている.

母比率 p の推定=母平均値 $\mathrm{E}[Y]$ の推定

サイズ n の標本中 k 個が「…である」とき,

$$\begin{aligned}\text{母平均値 } \mathrm{E}[Y] \text{ の推定値 } &= \text{標本平均値} \overline{Y} \\ &= \frac{1}{n}[\underbrace{1+\cdots+1}_{k}+\underbrace{0+\cdots+0}_{n-k}] \\ &= \frac{k}{n} = \hat{p}.\end{aligned}$$

連絡

- 来週は 7-002. 最初に紙の trial.
- 配布資料は 1-503 向かいの引出, `http://hig3.net` で再配布.
- 加減乗除と平方根 (ルート) の使える電卓持ってきてね. 関数電卓でなくてもいいです. 携帯電話の機能・アプリでもかまいません.
- 樋口オフィスアワー月 3.5(1-539) 金 4(1-502), Math ラウンジ月-木昼 (1-614)
- 次回は区間推定 西川確率統計 §8.1-8.4.