

母分散の片側検定, p 値, 統計ソフトウェア

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I L14(2018-01-17 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2018-01-17 Wed 11:52 JST hig"

今日の目標

- 標本から母分散の片側/両側カイ二乗検定ができる 西川確率統計 §7.4.3
- p 値の意味を説明できる
- Excel を使って t 検定, カイ二乗検定を実行できる



<http://hig3.net>

L13-Q1

Quiz 解答:母分散の区間推定

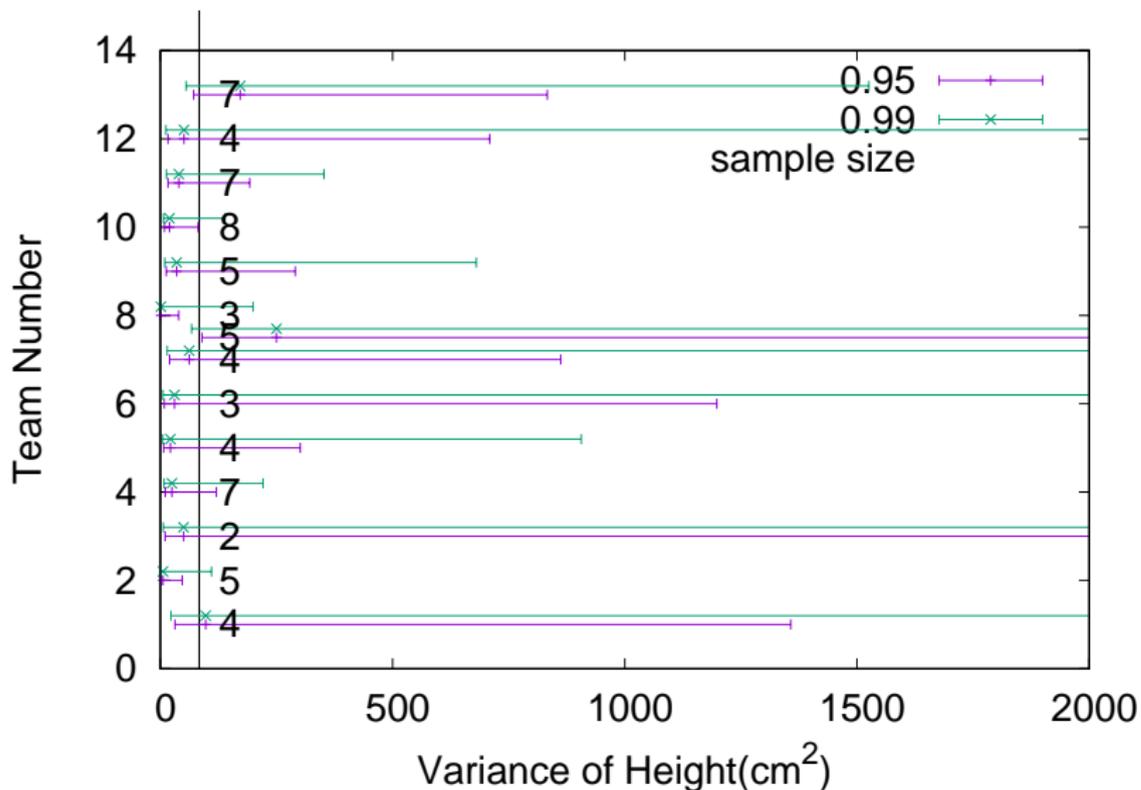
標本サイズは $n = 9$, 自由度は $9 - 1$, 母分散 σ^2 の信頼係数 0.95 の信頼区間は,

$$\frac{n-1}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)} \times s^2 < \sigma^2 < \frac{n-1}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \times s^2$$

$$\frac{8}{17.53} \times 72 < \sigma^2 < \frac{8}{2.180} \times 72$$

$$32.85 < \sigma^2 < 264.2$$

母分散の区間推定 (標本=各チーム)



ここまで来たよ

13 母分散の区間推定と検定

14 母分散の片側検定, p 値, 統計ソフトウェア

- 母分散の検定
- 過誤, 有意水準, 検出力, p 値
- p 値, Excel を利用した検定

母分散のカイ二乗検定 (母平均値未知) 西川確率統計 §7.4.3 |

未知の正規分布からの標本に基づき, 母分散が σ_0^2 かどうか判定したい!
($\sigma^2 < \sigma_0^2$ と言いたい, または $\sigma^2 > \sigma_0^2$ と言いたい)

- (片側検定) の対立仮説 H_1 母分散 $\sigma^2 < \sigma_0^2$ (または $\sigma > \sigma_0$)
- 帰無仮説 H_0 母分散 $\sigma^2 = \sigma_0^2$

$$P\left((n-1) \times \frac{s^2}{\sigma_0^2} < \chi_{1-\alpha}^2(n-1)\right) = \alpha.$$

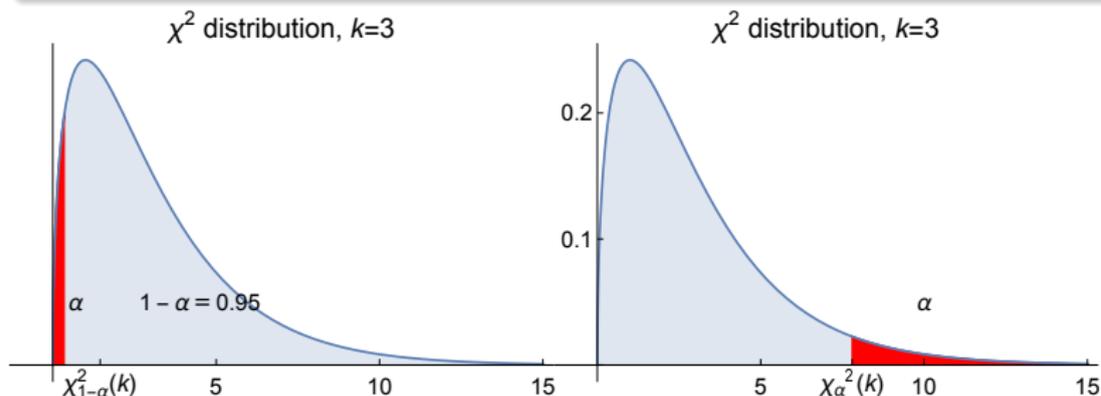
$$\text{または } P\left(\chi_{\alpha}^2(n-1) < (n-1) \times \frac{s^2}{\sigma_0^2}\right) = \alpha.$$

母分散のカイ二乗検定 (母平均値未知) 西川確率統計 §7.4.3 ||

母分散のカイ二乗検定の棄却域

母分散の片側カイ二乗検定の有意水準 α での棄却域は,

$$(n-1) \times \frac{s^2}{\sigma_0^2} < \chi_{1-\alpha}^2(n-1), \quad \text{または} \quad \chi_{\alpha}^2(n-1) < (n-1) \times \frac{s^2}{\sigma_0^2}$$



片側検定と両側検定

カイ二乗検定

- (共通の) 帰無仮説 $\sigma^2 = \sigma_0^2$
- 片側カイ二乗検定の対立仮説 $\sigma^2 < \sigma_0^2$ (または $\sigma^2 > \sigma_0^2$)
- 両側カイ二乗検定の対立仮説 $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

両側カイ二乗検定の場合は, 両側に $\alpha/2$ ずつの棄却域ができる. いずれかにはいったら帰無仮説を棄却.

t 検定

以前にやった t 検定にも両側検定 (やった) と片側検定がある.

- (共通の) 帰無仮説 $\mu = \mu_0$
- 片側 t 検定の対立仮説 $\mu < \mu_0$ (または $\mu > \mu_0$)
- 両側 t 検定の対立仮説 $\mu \neq \mu_0$

L14-Q1

TA Prob and Sol:母分散の片側カイ二乗検定

あるファーストフードチェーンのポテトフライ S の重さは、母分散が 4g^2 であることが定められているという。

トレーニング中のアルバイトの人に、ポテトフライ S サイズを 9 個作ってもらったところ、重さは下のようだった (単位は g)。

76, 76, 76, 76, 80, 84, 84, 84, 84.

このアルバイトの作るポテトフライ S の重さの母分散 σ^2 は、 2^2 より大きいか? 重さが正規分布にしたがうと仮定し、有意水準 $\alpha = 0.05$ で、母分散のカイ二乗検定で判定しよう。

略解

- ① 有意水準 $\alpha = 0.05$ で、母分散の片側カイ二乗検定を行う。

- ② 帰無仮説を, 「アルバイトの…重さの正規分布の母分散 σ^2 は, 2^2 に等しい」対立仮説を 2^2 より大きい」とする.
- ③ サイズ n の標本の不偏標本分散を s^2 とすると, 量 $Y = (n - 1) \times \frac{s^2}{2^2}$ は, 自由度 $n - 1$ のカイ二乗分布に従う. この量を検定統計量として用いる.
- ④ この標本に対して $Y = (n - 1) \times \frac{s^2}{2^2} = (9 - 1) \cdot \frac{16}{2^2} = 32$.
- ⑤ カイ二乗分布表より, この値に対して不等式 $Y > \chi_{\alpha}^2(n - 1) = 15.5073$ が成立するので, 帰無仮説を棄却する. 母分散は 2^2 より大きいと結論する.

棄却域に含まれなかったときの書き方は, 「棄却域に含まれないので帰無仮説は棄却できない. 母分散は 2^2 より大きいとは結論できない。」

西川確率統計例題 7.5(p.158), 問題 7.4(p.158), 演習 7.2(p.162)

L14-Q2

Quiz(母分散の片側カイ二乗検定)

あるファーストフードチェーンのポテトフライ S の重さは、母分散が $4g^2$ であることが定められているという。

あるベテランバイトは、重さのちらばりをこれより小さくできるからバイト代を上げると主張している。この主張を確かめるために、ポテトフライ S サイズを 7 個作ってもらったところ、重さは下のようだった (単位は g)。

79, 79, 79, 80, 81, 81, 81

このベテランバイトの作るポテトフライ S の重さの母分散 σ^2 は、 2^2 より大きいか? 重さが正規分布にしたがうと仮定し、有意水準 $\alpha = 0.05$ で、母分散のカイ二乗検定で判定しよう。

ここまで来たよ

13 母分散の区間推定と検定

14 母分散の片側検定, p 値, 統計ソフトウェア

- 母分散の検定
- 過誤, 有意水準, 検出力, p 値
- p 値, Excel を利用した検定

過誤, 有意水準, 検出力

西川確率統計 §7.3

		真実	
		H_0 は真	H_0 は偽
判断	H_0 を棄却しない	正しい判断	第 2 種の過誤 (確率 β で起きる)
	H_0 を棄却	第 1 種の過誤 (確率 α で起きる)	正しい判断

 α : 有意水準 $1 - \alpha$: 区間推定でいう に対応 $1 - \beta$: 検出力 or 検定力

α, β とも小さい方が高性能だが, 一方を小さくしようとすると他方が大きくなってしまう。

ふつうは, α を指定の値に固定して, β をなるべく小さくするという作戦。

ネイマン-ピアソンの補題

L14-Q3

Quiz(統計的仮説検定)

次のうち**正しい文の番号を1つだけ**答えよう.

- ① 統計的仮説検定を背理法による証明に例えたとき, 対立仮説は背理法の仮定に相当する
- ② 統計的仮説検定の手続きでは, 検定統計量が極端な値にならなかったとき, 帰無仮説を棄却する
- ③ 統計的仮説検定を実行すると, 結果として有意水準が定まる
- ④ 統計的仮説検定で, 帰無仮説が棄却されたとき, 「有意である」「有意な差があった」などという

ここまで来たよ

13 母分散の区間推定と検定

14 母分散の片側検定, p 値, 統計ソフトウェア

- 母分散の検定
- 過誤, 有意水準, 検出力, p 値
- p 値, Excel を利用した検定

p 値による比較

検定の Step5 では, s^2 (や \bar{X}) を α と比べてる. 2つの比べ方

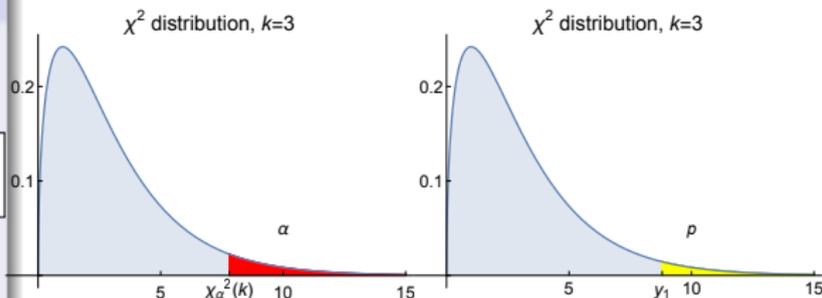
		棄却	棄却しない	
座標値勝負 (Step5)	$\chi_{1-\alpha}^2(n-1)$	>	<	$y_1 = (n-1) \frac{s^2}{\sigma^2}$
	$\chi_{\alpha}^2(n-1)$	<	>	
	↑ 表 or chisq.inv.rt			↓ chisq.dist.rt
面積勝負	α	>	<	p

標本の p 値 (p-value)

帰無仮説のもとで, 検定統計量がこの標本よりも

確率.

$\alpha > p$ のとき帰無仮説を棄却



Excel 2016 で標本ナントカ

標本にまつわる Excel の関数

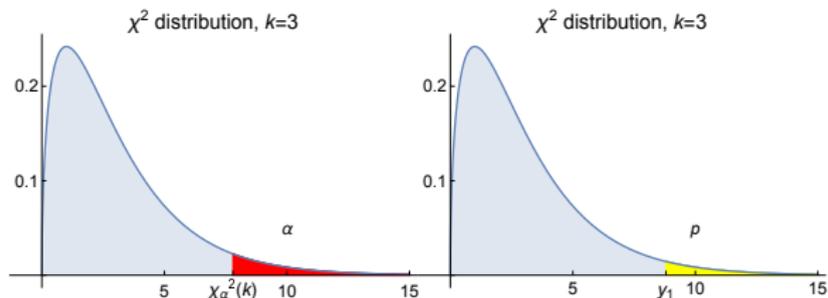
- 標本平均値 `average`
- 不偏標本分散 `var.s` — s for sample (標本), p for population (母集団)
- 不偏標本標準偏差 `stdev.s`

要区別: 有限母集団の量は母平均値 `average`, 母分散 `var.p`, 母標準偏差 `stdev.p`.

ご注意

- Excel のバージョンで異なる
- Excel はバグがあるから信じない, という人も. → R 確率統計☆演習 II, 計算科学 II

Excel 2016 でのカイ二乗分布

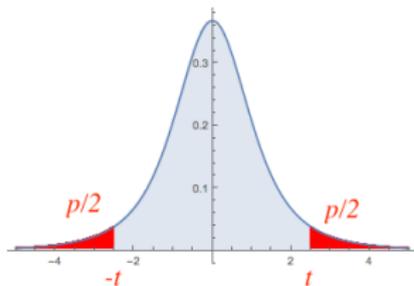


k : 自由度

カイ二乗 t 分布にまつわる Excel の関数

- $p = \text{chisq.dist.rt}(Y_1, k)$ 極端に大きいとき
- $1 - p = \text{chisq.dist.rt}(Y_0, k)$ 極端に小さいとき
- 表の代わりに $\text{chisq.inv.rt}(\alpha, k) = \chi_{\alpha}^2(k)$
- 表の代わりに $\text{chisq.inv.rt}(1 - \alpha, k) = \chi_{1-\alpha}^2(k)$

Excel 2016 での t 分布



k : 自由度

t 分布にまつわる Excel の関数

- $\frac{p}{2} = \text{t.dist.2t}(t, k)$
- 表の代わり $\text{t.inv.2t}(\frac{\alpha}{2}, k) = t_{\alpha/2}(k)$

分析ツールのメニューに、ダイアログで t 検定ができちゃうものが何個かあるが、それは「2 標本 t 検定」

確率統計☆演習 II

連絡

- 今後の予習復習問題はありません.
 - 配布資料は 1-503 向かいの引出, <http://hig3.net> で再配布.
 - 加減乗除と平方根 (ルート) の使える電卓持ってきてね. 関数電卓でなくてもいいです. 携帯電話の機能・アプリでもかまいません.
 - 樋口オフィスアワー月 3.5(1-539) 金 4(1-502), Math ラウンジ月-木昼 (1-614)
-
- 2018-02-05 月, 06 木 特別研究審査会 (=4 年生による卒業研究の発表会)
 - 2018-02-17 土 大学院入試 (4 年生向け), 学力認定試験 (3 年生向け)
 - 2018-02-20 火 修士論文公聴会 (修士 2 年による)
 - 2018-06-17 日 統計検定団体受験 (2 級をおすすめ)

ファイナルトライアル出題計画

外部記憶ペーパー使えます。電卓使用なし。必要な表は印刷します。Excel の問題はありません。

過去問題を公開していますが、出題傾向は毎年変わります。去年のものに対応するより、下の出題計画と Trial を参照することをお奨めします。

大注意:この計画は確定版ではありません。2018-01-18 木までに精密化・確定します。

- 離散型確率変数の確率・母期待値・母平均値・母分散を求める (L05, プチテスト再出題)
- 連続型確率変数の確率・母期待値・母平均値・母分散を求める (L06, プチテスト再出題)
- 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがう確率変数が, ある条件を満たす確率を求める (L09)
- 二項分布にしたがう確率変数の確率を正規分布を利用して計算する (L10)
- 標本から母平均値を点推定・区間推定する (L10,L11)
- 標本から母分散を点推定・区間推定する (L10,L13)
- 標本から母比率を点推定・区間推定する (L10,L11)
- 標本から母平均値の両側 t 検定を行う (L12)
- 標本から母分散の片側カイ二乗検定を行う (L13)
- 標本抽出と推定と検定の意味 (p 値, 信頼水準, 検出力) に関する選択肢的な問 (L10,L12 ほか, 数個)
- 確率分布 (正規分布, 二項分布, t 分布, カイ二乗分布) についての選択肢的な問 (数個)