連続型確率変数

樋口さぶろお　http://hig3.net

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I　L07(2018-11-07 Wed)

最終更新: Time-stamp: ”2018-11-12 Mon 18:59 JST hig”

今日の目標

- 連続型確率変数の確率, 母平均値, 母分散, 母期待値が計算できる　高校 数学 B　前園確率統計 §2.2　前園確率統計 p.49
- 一様分布を例に, 母平均値・母分散・変数変換の意味が説明できる

L06-Q1
Quiz 解答:多次元の確率変数の期待値

1. $\mathrm{E}[X+2Y] = 0\cdot(1+2\cdot 0) + \frac{2}{12}(2+2\cdot 0) + \frac{1}{12}(3+2\cdot 0) + \frac{4}{12}(1+2\cdot 2) + 0(2+2\cdot 2) + \frac{5}{12}(3+2\cdot 2) = \frac{62}{12}$.
2. $\mathrm{E}[\mathrm{I}_{[Y\geq 1]}(X,Y)] = 0\cdot 0 + \frac{2}{12}\cdot 0 + \frac{1}{12}\cdot 0 + \frac{4}{12}\cdot 1 + 0\cdot 1 + \frac{5}{12}\cdot 1 = \frac{9}{12}$.
3.
$$f_{\mathrm{X}}(x) = \begin{cases} 4/12 & (x=1) \\ 2/12 & (x=2) \\ 6/12 & (x=3) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases} \qquad f_{\mathrm{Y}}(y) = \begin{cases} 3/12 & (y=0) \\ 9/12 & (y=2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$
4. (1 の別解) $\mathrm{E}[X+2Y] = \mathrm{E}[X] + 2\mathrm{E}[Y] =$ 周辺分布で計算.

L06-Q2
Quiz 解答:独立と限らない確率変数の母期待値

1. $\mathrm{E}[-2X+3Y]=-2\mathrm{E}[X]+3\mathrm{E}[Y]=5.$
2. $\mathrm{V}[-2X+3Y]=\mathrm{E}[(-2X+3Y)^2]-\mathrm{E}[-2X+3Y]^2=$ $(-2)^2\mathrm{V}[X]+2(-2)(3)\mathrm{Cov}[X,Y]+3^2\mathrm{V}[X]=20-84+99=35.$

L06-Q3

Quiz 解答:2 つの離散型確率変数の母期待値・母平均値・母共分散・確率・独立性

$\mathrm{E}[X]=\frac{1}{7}\cdot 1+\frac{6}{7}\cdot 3=\frac{19}{7},$
$\mathrm{E}[Y]=\frac{3}{7}\cdot 2+\frac{4}{7}\cdot 4=\frac{22}{7},$
$\mathrm{E}[X^2]=\frac{1}{7}\cdot 1^2+\frac{6}{7}\cdot 3^2=\frac{55}{7},$
$\mathrm{E}[XY]=\frac{1}{7}\cdot 2\cdot 1+\frac{2}{7}\cdot 3\cdot 2+\frac{4}{7}\cdot 3\cdot 4=\frac{62}{7}.$

1. 独立でない.
2. $\mathrm{V}[X]=\mathrm{E}[X^2]-\mathrm{E}[X]^2=\frac{24}{49}.$
3. $\mathrm{Cov}[X,Y]=\mathrm{E}[XY]-\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]=\frac{16}{49}.$

L06-Q4

Quiz 解答:離散型確率変数の独立性

確率の和は 1 なので, $\frac{2}{12}+\frac{1}{12}+A+B=1$.
よって,

$$f_{\mathrm{Y}}(y)=\begin{cases}\frac{3}{12} & (y=3)\\ \frac{9}{12} & (y=7)\end{cases}$$

独立性から,

$$\begin{aligned}
(f_{\mathrm{XY}}(2,3)=)f_{\mathrm{X}}(2)\tfrac{3}{12}&=\tfrac{2}{12},\\
(f_{\mathrm{XY}}(3,3)=)f_{\mathrm{X}}(3)\tfrac{3}{12}&=\tfrac{1}{12},\\
(f_{\mathrm{XY}}(2,7)=)f_{\mathrm{X}}(2)\tfrac{9}{12}&=A,\\
(f_{\mathrm{XY}}(3,7)=)f_{\mathrm{X}}(3)\tfrac{9}{12}&=B.
\end{aligned}$$

4 式から, $A,B,f_{\mathrm{X}}(2),f_{\mathrm{X}}(3)$ を未知数とみて, $f_{\mathrm{X}}(2),f_{\mathrm{X}}(3)$ を消去すると,
$\frac{2}{12}:\frac{1}{12}=A:B$.
よって, $A=\frac{6}{12}$, $B=\frac{3}{12}$.

別解. 確率の和は 1 なので $\frac{2}{12}+\frac{1}{12}+A+B=1$. 独立性 $f_{\mathrm{XY}}(2,3)=f_{\mathrm{X}}(2)f_{\mathrm{Y}}(3)=(\frac{2}{12}+\frac{1}{12})\cdot(\frac{2}{12}+A)$ を連立して解く.

L06-Q5

Quiz 解答:独立な確率変数の母期待値

1. X,Y は独立なので $\mathrm{E}[XY]=\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$ であることに注意して, $\mathrm{E}[(-2X+3Y)(X+5Y)]=\mathrm{E}[-2X^2]+\mathrm{E}[-7XY]+\mathrm{E}[15Y^2]=-2(\mathrm{V}[X]+\mathrm{E}[X]^2)-7\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]+15(\mathrm{V}[Y]+\mathrm{E}[Y]^2)=240.$
2. X,Y は独立なので $\mathrm{V}[XY]=\mathrm{V}[X]+\mathrm{V}[Y]$ であることに注意して, $\mathrm{V}[-2X+3Y]=\mathrm{V}[-2X]+\mathrm{V}[3Y]=4\mathrm{V}[X]+9\mathrm{V}[Y]=119.$

ここまで来たよ

6 略解:多次元の確率分布と独立性

7 連続型確率変数
- 連続型確率変数
- 一様分布

復習+ちょっと I

L07-Q1

Quiz(離散的な確率変数の母平均値・母分散・母標準偏差・確率)

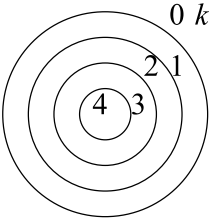
整数に値をとる離散型確率変数 X は次の確率分布に従う.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{55} & (0 \leq x \leq 10) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 確率 $P(X \leq 5)$ を求めよう.
2. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.

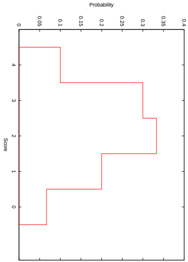
あるプレイヤーのダーツの得点確率

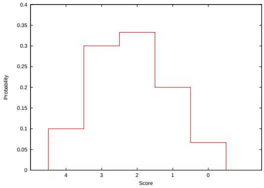
得点: 的の真ん中から順に $4, 3, 2, 1, 0$ 点



離散型確率分布

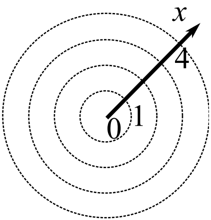
得点 s	確率関数 $f(s)$
4	0.1
3	0.3
2	0.3333
1	0.2
0	0.0667

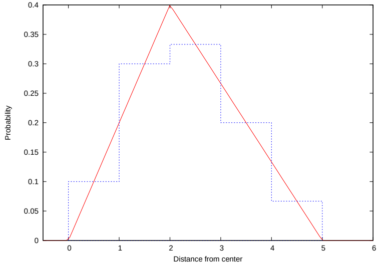




中心から x cm にあてる確率

的の真ん中からの距離 x cm, 得点 $s = 4 - x$ 点 (実数).





$x = 0.5$cm と 0.9 cm への当たりやすさは違う. $x = 1.0$cm を境に急に変わるわけじゃない. これを表現したい.

$\rightsquigarrow$ 点数の出やすさは x のある関数 $f(x)$ で表される!

連続型確率変数 連続型確率分布

連続型 確率密度関数 $f(x)$ (x は実数)

離散型 確率関数 $f(x)$ (x は整数またはとびとびの値)

連続型確率変数

連続型確率変数

連続型確率変数 X とは, 実数値をとり, 確率が確率密度関数 $f(x)$ で指定されるもの.

離散的

得点 x	確率 $f(x)$
0	0.1
1	0.3
$\vdots$	
x	$f(x)$

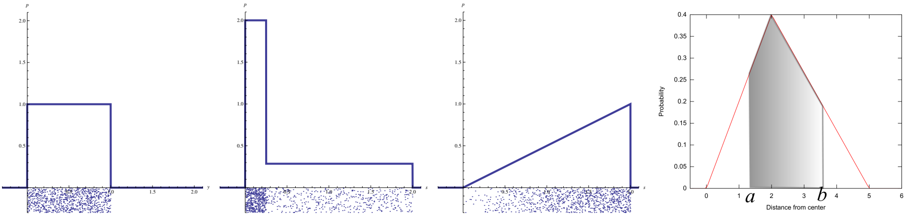
連続的

-
- $0 \leq f(x)$ である. $f(x) \leq 1$ とは限らない.

物理・工学系では $p(x)$ と書いたら確率密度関数 $f(x)$ を意味することも

計算科学☆演習 II

確率密度関数の例



確率密度関数と確率

$$P(a \leq X < b) = (\text{あとで}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad (\text{下側面積})$$

連続型確率変数の母期待値

母期待値の定義

前園確率統計 p.49

$$\text{離散型確率変数} \quad \mathrm{E}[u(X)] = \sum_x u(x) \cdot f(x)$$

$$\text{連続型確率変数} \quad \mathrm{E}[u(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\lim_{\text{分割}\to\text{細かく}} \sum_i f(x_i)\Delta x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \text{ だから自然.}$$

- 離散型と同じ定義: 母平均値 $\mu = \mathrm{E}[X]$, 母分散 $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[(X-\mu)^2]$
- 離散型と同じ公式が成立

L07-Q2

Quiz(連続的な値をとる確率変数)

次の確率密度関数を持つ確率変数 X を考える.

$$f(x) = \begin{cases} 8x & (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

1. $X \geq +\frac{1}{4}$ となる確率を求めよう.
2. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.
4. 母期待値 $\mathrm{E}[\frac{1}{\sqrt{X}}]$ を求めよう.

$\mathrm{E}[2X+3], \mathrm{V}[2X+3]$ も夢想してみて.

前園確率統計演習問題 2.1

確率密度関数から事象の確率を求める

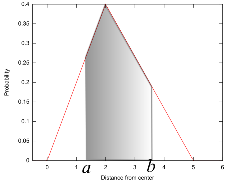
$$P(\text{事象}) = P(\text{条件}) = \mathrm{E}[\mathrm{I}_{[\text{条件}]}(X)]$$

$$P(a \le X < b) = \mathrm{E}[\mathrm{I}_{[a \le X < b]}(X)]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{I}_{[a \le X < b]}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \boxed{}$$

$$\text{全事象の確率} = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{E}[1]$$

じゃあ, ちょうど距離 $x = a$ cm となる確率は? $\rightsquigarrow \boxed{}$.



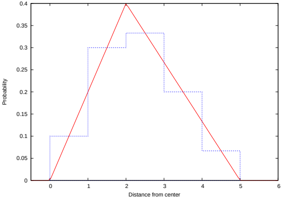
$$\mathrm{I}_{[X\text{ の条件}]}(x) = \begin{cases} 1 & (x\text{ が条件を満たす}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

連続型確率変数の母平均値と母分散の直観的意味

待て

- チェビシェフの不等式,
- 大数の法則

$f(x)$ のグラフ



2 次元の連続型確率分布 前園確率統計 p.32

2 次元の確率密度関数 $f_{\mathrm{XY}}(x, y)$.

母期待値の定義 前園確率統計 p.50

離散型確率変数　$$\mathrm{E}[v(X,Y)] = \sum_x \sum_y v(x,y) \cdot f_{\mathrm{XY}}(x,y)$$

連続型確率変数　$$\mathrm{E}[v(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v(x,y) \cdot f_{\mathrm{XY}}(x,y)\, \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

X, Y が独立 $\Leftrightarrow f_{\mathrm{XY}}(x, y) = f_{\mathrm{X}}(x) f_{\mathrm{Y}}(y)$. 前園確率統計 p.34

公式群 前園確率統計

- $\boxed{\text{定理 3.1(1)}}$ $\mathrm{E}[aX+b]=a\mathrm{E}[X]+b$. 一般に $\mathrm{E}[u_1(X)+u_2(X)]$ でも.
- $\boxed{\text{定理 3.1(2)}}$ $\mathrm{E}[aX+bY+c]=a\mathrm{E}[X]+b\mathrm{E}[Y]+c$. 一般に $\mathrm{E}[v_1(X,Y)+v_2(X,Y)]$ でも.
- $\boxed{\text{定理 3.2(1)}}$ $\mathrm{V}[X]=\mathrm{E}[X^2]-\mathrm{E}[X]^2$
- $\boxed{\text{定理 3.2(2)}}$ $\mathrm{V}[aX+b]=a^2\mathrm{V}[X]$
- $\boxed{\text{定理 3.3(1)}}$ $\mathrm{Cov}[X,Y]=\mathrm{E}[XY]-\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$
- $\boxed{\text{定理 3.3(2)}}$ $\mathrm{Cov}[aX,bY]=ab\mathrm{Cov}[X,Y]$
- $\boxed{\text{定理 3.3(4)1}}$ 独立なら $\mathrm{E}[XY]=\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$
- $\boxed{\text{定理 3.3(4)3}}$ 独立なら $\mathrm{V}[X+Y]=\mathrm{V}[X]+\mathrm{V}[Y]$

E は積分だと思って見直すと?

ここまで来たよ

6 略解:多次元の確率分布と独立性

7 連続型確率変数
- 連続型確率変数
- 一様分布

一様分布 前園確率統計 p.23

一様分布 $\mathrm{U}(a,b)$

確率変数 X の確率密度関数が次で与えられるとき, X は区間 $[a,b)$ の一様分布 $\mathrm{U}(a,b)$ に従うという.

$$f(x) = \begin{cases} C(\text{定数}) & (a \leq x < b) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

L07-Q3

Quiz(一様分布)

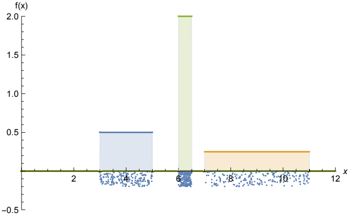
連続型確率変数 X が一様分布 $\mathrm{U}(c,d)$ にしたがう.

1. C を求めよう.
2. $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. $\sqrt{\mathrm{V}[X]}$ を求めよう.

$Y = aX + b$ の意味

X が 一様分布 $\mathrm{U}(r, s)$ にしたがうとき,
$Y = aX + b$ は 一様分布 $\mathrm{U}(ar + b, as + b)$ にしたがう.

$\mathrm{E}[aX + b] =$
$\sqrt{\mathrm{V}[aX + b]} =$



左から $X \sim \mathrm{U}(3, 5)$, $Z = \frac{1}{4}X + \frac{21}{4}$, $Y = 2X + 1$.

連絡

Moodle
https://learn.math.ryukoku.ac.jp/

Moodle モバイルアプリ
https://download.moodle.org/mobile

起動後, URL https://learn.math.ryukoku.ac.jp/moodle を登録

- trial に, 前回の問題と同種の問題を再出題してます (1/3 くらい)
- 予習復習問題を, 期限後も (再/初) 受験できるようにしてます. 点数にはカウントしないけど, プチテスト準備に活用してね.
- 樋口オフィスアワー火昼 (1-539) 金 14:40-15:40(1-502), Math ラウンジ月-木昼 (1-614)
- Trial 予告
- Learn Math Moodle の予習復習問題で来週の trial に備えてね.
- 教科書の正規分布のところ 前園確率統計 p.29 読んできてね.
- 課題 L04-2(Excel でやるやつ) 2018-11-08 木:再オープン, 2018-10-20 火:締切
- 特別研究履修 (=研究室配属) 説明会 2 年生も歓迎 2018-11-21 水 4

プチテスト計画

プチテスト 2018-11-21 水. 1-609 実習室. 30 ピーナッツ.
以下の出題計画は最終的なものではありません. 2018-11-15 木に修正, 確定します. 予習復習問題のりの PC(Moodle) による回答あり. Excel の使い方の問題は出題しません.

- データやグラフから平均値, 分散, 共分散, 標準偏差, 四分位数, 四分位範囲などを求めその意味を解釈する (L02)
- データやグラフや平均値分散から標準得点, 偏差値を求め, その意味を解釈する (文章題) (L03)
- データやグラフや平均値分散などから共分散, 相関係数, 回帰係数, 回帰直線を求めその意味を解釈する (L04, 課題 L04-2)
- 1 次元の離散型確率変数について, 確率分布から確率, 母期待値, 母平均値, 母分散, 母標準偏差を求める $\times n$ 問 (L05)
- 確率変数の 1 次式や 2 次式について, 母平均値, 母分散から, 母平均値, 母分散, 母標準偏差を求める (L05,L06)
- 2 次元の離散型確率分布について, 同時分布, 周辺分布, 母期待値, 母分散, 母共分散, 独立性から母期待値, 母共分散, 母相関係数を求める (L06)
- 連続型確率変数について, 確率密度関数から確率, 母期待値, 母平均値, 母分散, 母標準偏差を求める $\times n$ 問 (L07)
- 正規分布について, 確率密度関数と数表から確率, 母期待値, 母平均値, 母分散, 母標準偏差を求める (L08)

おすすめの準備方法 出題範囲や方式は毎年変わるので, 過去問題 (公開) 中心の準備はおすすめしません. 上の出題計画を参照して, 今年度の trial, チーム課題, そのフィードバック, 予習復習問題を中心に準備することをおすすめします. Learn Math Moodle の予習復習問題は, 点数はこれまでの最高点で固定されてますが, 練習のための再受験が可能です.