母平均値の統計的仮説検定

樋口さぶろお　http://hig3.net

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I　L12(2018-12-19 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2019-01-09 Wed 18:36 JST hig"

今日の目標

- 母比率を区間推定できる 前園確率統計 §5.4
- 統計的仮説検定の考え方が説明できる
- 母平均値の t 検定ができる

L11-Q1

Quiz 解答:二項分布と正規分布と中心極限定理

1. 表の出る回数 U は, 二項分布 $\mathrm{B}(400, \frac{1}{10})$ にしたがう. よって, $\mathrm{E}[U] = 40$, $\mathrm{V}[U] = 36$ である.
2. 各回 i の表裏について, 確率変数

$$X_i = \begin{cases} 1 & (\text{表}) \\ 0 & (\text{裏}) \end{cases}$$

   を考えると, $U = X_1 + \cdots + X_{400}$ である. X_i $(i = 1, \ldots, 400)$ は独立同分布にしたがい, $\mu = \mathrm{E}[X_i] = \frac{1}{10}, \sigma^2 = \mathrm{V}[X_i] = \frac{1}{10}(1 - \frac{1}{10})$.
   $n = 400$ が大きいと考えると, 中心極限定理より, U は近似的に正規分布 $\mathrm{N}(n\mu, n\sigma^2)$ すなわち $\mathrm{N}(40, 6^2)$ にしたがう.
3. $Z = \frac{U-40}{6}$ は近似的に標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ にしたがう. よって, 求める確率は, $P(U > 31) = P(Z > -\frac{9}{6}) = Q(-\frac{3}{2}) - Q(\infty) = (1 - Q(\frac{3}{2})) - 0 = 0.9332$.

L11-Q2

L11-Q3

Quiz 解答:母平均値の区間推定 (母分散未知)

1. 重さの標本平均値は $m = 50\mathrm{g}$. 不偏標本分散は $s^2 = \frac{1}{4-1} \cdot 14\mathrm{g}^2$. 自由度 $k = n - 1 = 3$ の t 分布表を参照して, 信頼係数 0.95 の信頼区間は

$$50 - 3.182 \times \sqrt{\frac{1}{4}\frac{14}{3}} < \mu < 50 + 3.182 \times \sqrt{\frac{1}{4}\frac{14}{3}}.$$

2. 同様に,

$$50 - 5.841 \times \sqrt{\frac{1}{4}\frac{14}{3}} < \mu < 50 + 5.841 \times \sqrt{\frac{1}{4}\frac{14}{3}}.$$

推定が正確であるとは 信definition区間が ______ であること.
L11-Q1

Quiz(区間推定の性質)

標本からの母平均値の区間推定について, 正しいのはどれ?

1. 母分散が大きいほど, 信頼区間は大きくなる
2. 標本サイズが大きいほど, 信頼区間は大きくなる
3. 母平均値が大きいほど, 信頼区間は小さくなる
4. 信頼係数が大きいほど, 信頼区間は小さくなる

前園確率統計例題 5.4 | 前園確率統計演習問題 5.5

ここまで来たよ

11 略解:中心極限定理, 母平均値母比率の区間推定
- 母比率 (ベルヌーイ分布の p) の区間推定

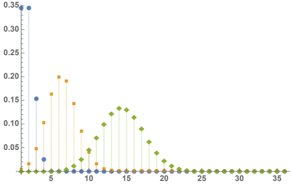
12 母平均値の統計的仮説検定
- 統計的仮説検定の考え方
- 正規分布にしたがう母集団の母平均値の t 検定

母比率の信頼区間 高校 数学 B 前園確率統計 §5.4

- 候補者 A の得票率は何% ? n 人に質問しただけで推定したい.
- 出荷する製品の何% が不良品? n 個だけ抜き出して調査したい.
- このコインの表が出る確率は? n 回投げるだけで推定したい.

$Y \sim \mathrm{B}(n, p)$. n が大きいとき近似的に $Y \sim \mathrm{N}(np, np(1-p))$.
$\frac{Y}{n} \sim \mathrm{N}(p, \frac{1}{n}p(1-p))$.

$p = 0.8, n = 4, 20, 40.$



$$P\left(p - 1.96 \times \sqrt{\frac{1}{n}p(1-p)} < \hat{p} < p + 1.96 \times \sqrt{\frac{1}{n}p(1-p)}\right) = 0.95$$

逆に解いて ($\sqrt{}$ の中で $p = \hat{p}$ とする近似をする.

母比率の信頼区間 (母分散未知) 前園確率統計 §5.4

X のサイズ n の標本で, 標本比率 $\hat{p} = y/n$ のとき, 母比率の信頼係数 $1 - \alpha = 0.95$, 信頼係数 $1 - \alpha = 0.99$ の信頼区間は

$$\hat{p} - 1.96 \times \sqrt{\frac{1}{n}\hat{p}(1-\hat{p})} < p < \hat{p} + 1.96 \times \sqrt{\frac{1}{n}\hat{p}(1-\hat{p})},$$

$$\hat{p} - 2.58 \times \sqrt{\frac{1}{n}\hat{p}(1-\hat{p})} < p < \hat{p} + 2.58 \times \sqrt{\frac{1}{n}\hat{p}(1-\hat{p})}.$$

L11-Q2

Quiz(母比率の区間推定)

選挙で出口調査をしたところ, 50 人中 35 人が A 候補に投票したと答えた. 母集団を投票した人全体とする. そのうち A 候補に投票した人の母比率 (得票率) を考える.

1. A 候補の得票率を, (点) 推定しよう
2. A 候補の得票率を, 信頼係数 $1-\alpha=0.95$ で区間推定しよう.
3. A 候補の得票率を, 信頼係数 $1-\alpha=0.99$ で区間推定しよう.

前園確率統計例題 5.5

注: 下限, 上限が 0,1 を越えるときは, 0,1 に直してしまっていい.

L11-Q3

理工学部生の出身高校に関する統計的検定

別に提示するデータから, 理工学部生全体 (母集団) で, 出身高校が滋賀県内にある人の母比率を区間推定しよう.

ここまで来たよ

11 略解:中心極限定理, 母平均値母比率の区間推定
- 母比率 (ベルヌーイ分布の p) の区間推定

12 母平均値の統計的仮説検定
- 統計的仮説検定の考え方
- 正規分布にしたがう母集団の母平均値の t 検定

推定と検定 前園確率統計 §6

点推定 μ は値 xx と推定する

区間推定 μ は値 yy と値 zz の間と推定する (信頼係数 $1-\alpha$ で)

仮説検定 μ は値 xx と

あるドーナツ製造器は, 重さ X(確率変数) の母平均値が 55g であるように調整済みだという. しかし, 5 個買ってみたら, みんな軽めな感じ. これ, 本当に母平均値 55 g なの?(っていうか 55 g でないと言いたい).

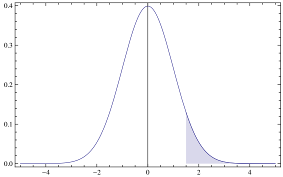
ある学習法を使ってるある生徒の, 毎日のテストでの 1 か月の平均点は 63 点. 自分が別の学習法で教えた 5 日間の平均点は $\cdots$. 自分の方法は優れていると言いたい.

検定はだいたいこんな考え方

このサイコロは, 正規分布 $\mathrm{N}(10, 2^2)$ にしたがうという. $\sigma^2 = 2^2$ は確かだとわかってるけど, 本当に $\mu = 10$ なのか疑っている. サイズ 4 のサンプルを抽出したところ,

$$9, 12, 12, 15$$

だった. $\rightarrow$ サンプルサイズ $N = 4$, 標本平均値は 12



検定の例え話．有意水準とは? 前園確率統計 §6.7

一定の誤りのある異常検査薬のようなもの．

	検査薬発色，陽性，有意，帰無仮説を棄却	検査薬発色せず，陰性，有意でない，帰無仮説を棄却できない
正常でない，対立仮説が成立 $\mu \neq \mu_0$	真陽性	偽陰性，第 2 種の過誤
正常，帰無仮説が成立 $\mu = \mu_0$	偽陽性，第 1 種の過誤 この箱の中はほぼない ($\alpha = 0.01$ or 0.05) と思ってる	真陰性

- 有意水準 $\alpha = \frac{\text{偽陽性}}{\text{偽陽性}+\text{真陰性}} = \frac{\text{正常}}{\text{検査薬発色}}$．小さいほど，よい，というか発色したら間違いない検査薬．
- 検出力 $1-\beta$, $\beta = \frac{\text{偽陰性}}{\text{偽陰性}+\text{真陽性}} = \frac{\text{正常でない}}{\text{検査薬発色しない}}$．小さいほど，よい，というか発色しなかったら間違いない検査薬．敏感な検査薬

検定の中の仕組み

標本 $X \overset{\text{A 検定},y_A}{\mapsto}$ 検定統計量 $y_A(X)$ の実現値

- 帰無仮説 (正常値) の設定
- $y_A(X)$ の実現値が境目を越えて大きすぎたり小さすぎたりしたら (検定統計量の実現値が棄却域にはいったら) ‘発色’
- その境い目は, 有意水準 α を指定して表から決める. $\alpha = 0.01, 0.05$ と小さく取り, 第 1 種の過誤は存在しないかのような態度をとる.

みんな性能のよい (α, β の小さい) y(検定) を本から探したり, 自分で作ったりしてる.

帰無仮説と対立仮説

- H_0:帰無仮説 (null hypothesis) = 背理法の仮定 = 「真の母平均値 μ は 55g に等しい」
- H_1:対立仮説 (alternative hypothesis) = 示したい命題 = 「真の母平均値 μ は 55g でない」

検定 (test)=統計的仮説検定 (statistical hypothesis test)
心理学, 教育学, 社会科学などでは標本サイズが大きくできないことが多い. 標本サイズが小さくても Yes/No のいちおうの結論を出す, 科学業界で合意された方法.

ここまで来たよ

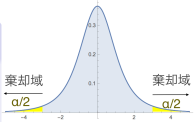
11. 略解:中心極限定理, 母平均値母比率の区間推定
    - 母比率 (ベルヌーイ分布の p) の区間推定

12. 母平均値の統計的仮説検定
    - 統計的仮説検定の考え方
    - 正規分布にしたがう母集団の母平均値の t 検定

正規分布にしたがう母集団の母平均値の t 検定

母平均値の両側 t 検定

- 帰無仮説 母平均値 $\mu = \mu_0$, 対立仮説 $\mu \neq \mu_0$.
- 検定統計量 $T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{S} \times \sqrt{n}$ は自由度 $n-1$ の t 分布にしたがう.
- 棄却域 $|t| > t(n-1; \alpha/2)$.



L12-Q4 前園確率統計 §6.1(p.93)

Quiz(母平均値の検定 (母分散未知)=t 検定)

あるドーナツ製造マシンが次々に製造するクロワッサンドーナツの重さ X_ig は, 正規分布にしたがうことがわかっている. 母平均値は $57\mathrm{g}$ だと思っていたが, きょう 5 個製造したところ, 下のようだった.
$52\mathrm{g}, 52\mathrm{g}, 53\mathrm{g}, 48\mathrm{g}, 50\mathrm{g}.$
本当にドーナツ製造マシンが次々に製造するクロワッサンドーナツの重さ X_ig の母平均値は $57\mathrm{g}$ なのだろうか. 統計的仮説検定を行って判定しよう.

重さは負にならないし, 正規分布にしたがうというのはおかしな前提だが, ここは練習ってことで. 世の中には変な状況下で強引に t 検定を使う人が多くいるが, 数理の人はおかしさを認識できるように.

前園確率統計演習問題 6.1

レポートや論文での検定の書き方

母集団を決める. 母集団の分布タイプを仮定する.

1. 「有意水準 $\alpha = \cdots$ で」「…検定を行う」(2,3 を名前で予告する)
2. 「帰無仮説を…とする」
3. 「帰無仮説のもとで検定統計量 Y は …分布にしたがう」
4. 「この標本に対してナントカ検定統計量の実現値は $y = \cdots$ である」
5. (棄却域の境い目の値を計算しておく)
6. 「y 不等号 (境い目) より帰無仮説を棄却する/棄却できない」「よって母ナントカは…である (とはいえない)」

L12-Q5

Quiz(正規分布の母平均値に関する t 検定)

あるコンビニには, ドーナツ販売開始前には, 9:00–10:00 に平均 196 人の客が来店していた. ドーナツ販売開始後の 4 日間, 来店客数は次の通りだった. $204, 208, 188, 200$
来店者数は正規分布にしたがうと考える. ドーナツ販売開始後に来店客数の母平均値は変化したか? 有意水準 0.05 で考える.

L12-Q6

理工学部生の平均身長に関する統計的検定

日本の大学生の平均身長は 160cm であると耳にした (←教員の捏造). 理工学部生の平均身長は, これと異なるという仮説を立証したい.
理工学部生全体 (母集団) の身長が正規分布にしたがうとして, 自分のチームのデータから, 統計的仮説検定で立証を試みよう.

連絡

Moodle
https://learn.math.ryukoku.ac.jp/

GeoGebra 確率電卓
https://www.geogebra.org/classic#probability

Moodle モバイルアプリ
https://download.moodle.org/mobile

起動後, URL https://learn.math.ryukoku.ac.jp/moodle を登録
https://learn.math.ryukoku.ac.jp → 今日のところ → 教室内 標本抽出-区間推定
https://learn.math.ryukoku.ac.jp/moodle/mod/questionnaire/view.php?id=1547

- 図書館ミニ講義「確率を学ぶ〜年末ジャンボ宝くじが当たる確率は !? 〜」by 樋口
  - 2018-12-20 木 12:45-13:15
  - 生協コンビニ地下スチューデントコモンズ (瀬田) ミーティングスペース
- 予習復習問題を, 期限後も (再/初) 受験できます．点数にはカウントしないけど, プチテスト準備に活用してね.
- Learn Math Moodle の予習復習問題は来週期限のものがあります．プチテストに備えてね.
- 教科書のカイ二乗分布 前園確率統計 p.36, 母分散の検定 前園確率統計 §6.2, 母比率の検定 前園確率統計 §6.6 読んでおいてね.