母比率・母分散の両側/片側検定

樋口さぶろお　http://hig3.net

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I　L13(2019-01-09 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2019-01-10 Thu 06:40 JST hig"

今日の目標

- 母比率の片側/両側正規検定ができる 前園確率統計 §6.4
- 母分散の片側カイ二乗検定ができる 前園確率統計 §6.2

L12-Q1

Quiz 解答:区間推定の性質

1

L12-Q2

Quiz 解答:母比率の区間推定

A 候補に投票したを $X=1$, しなかったを $X=0$ とする.

1. 標本比率は $\hat{p}=\frac{35}{50}=0.7$. 母比率 p を 0.7 と推定する.
2. X の母分散は $0.7\times(1-0.7)=0.21$ と推定する.
   母比率 p の信頼係数 $1-\alpha=0.95$ の信頼区間は,

$$
\begin{aligned}
0.7-1.96\times\sqrt{\frac{1}{50}\cdot 0.21} <&p < 0.7+1.96\times\sqrt{\frac{1}{50}\cdot 0.21}\\
0.7-0.13 <&p < 0.7+0.13\\
0.57 <&p < 0.83
\end{aligned}
$$

信頼係数 0.95 では当選ってことですね (放送用語「当選確実」で, 後であやまらなきゃいけない確率は 0.05 以下).

3. 母比率 p の信頼係数 0.99 の信頼区間は,

$$\begin{aligned} 0.7 - 2.58 \times \sqrt{0.0042} < &p < 0.7 + 2.58 \times \sqrt{0.0042} \\ 0.7 - 0.17 < &p < 0.7 + 0.17 \\ 0.53 < &p < 0.87 \end{aligned}$$

信頼係数 0.99 のほうが慎重な判断基準ですが, それでも当選ってことですね.

L12-Q3

L12-Q4 前園確率統計 §6.1(p.93)

Quiz 解答:母平均値の検定 (母分散未知)=t 検定

1. 有意水準 0.05 で, 正規分布の母平均値に対する t 検定を行う.
2. 帰無仮説を「ドーナツの重さの母平均値 μ が $57\mathrm{g}$ に等しい」とする.

3. サイズ $n=5$ の標本の標本平均値を $\bar{X}$, 不偏標本分散を s^2 とするとき, 検定統計量
$$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sqrt{s^2/n}}$$
は, 自由度 $5-1$ の t 分布に従う.
4. この標本に対して, $t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}=\frac{51-57}{\sqrt{\frac{1}{5}\frac{16}{5-1}}}=-3\sqrt{5}=-6.708.$
5. t 分布表より, $t(4;0.05/2)=2.776<|t|$ だから, 帰無仮説を棄却する. ドーナツの重さの母平均値は 57g と異なる, と結論する.
(注: このことを, 「有意」significant という言葉で表現する人もいる. 結果は有意である, 母平均値 μ は 57g と有意に異なる, 母平均値 μ と 55 の間には有意差がある, 有意な標本である, など)

L12-Q5

Quiz 解答:正規分布の母平均値に関する t 検定

1. 有意水準 0.05 で, 正規分布の母平均値に対する t 検定を行う.

2. 帰無仮説を「ドーナツ販売開始後の, 来店客数の母平均値 μ は 196 に等しい」とする.
3. サイズ $n=4$ の標本の標本平均値を $\bar{X}$, 不偏標本分散を s^2 とすると, 検定統計量
$$T=\frac{\bar{X}-196}{\sqrt{s^2/n}}$$
は, 自由度 $4-1$ の t 分布に従う.
4. この標本に対して, $\bar{X}=200, s^2=\frac{224}{4-1}=74.7$. よって, $t=\frac{200-196}{\sqrt{\frac{1}{4}\frac{224}{3}}}=0.92582$.
5. t 分布表より, $t(3;0.05/2;=)3.182>|t|$ だから, 帰無仮説は棄却できない. 来店客数が変化したとは結論できない.
(注: 結果は有意でなかった, 母平均値 μ と 196g の間には有意差がない, など).

ここまで来たよ

12 略解:母平均値の統計的仮説検定

13 母比率・母分散の両側/片側検定
- 統計的仮説検定の考え方
- 母比率の検定 (二項検定の正規近似)
- 不偏標本分散のちらばりとカイ二乗分布
- 母分散の検定

検定の例え話．有意水準とは? 前園確率統計 §6.7

ある程度の誤りのある異常検査薬のようなもの．

	検査薬発色，陽性，有意，帰無仮説を棄却	検査薬発色せず，陰性，有意でない，帰無仮説を棄却できない
正常でない，対立仮説が成立 $\mu \neq \mu_0$	真陽性	偽陰性，第 2 種の過誤
正常，帰無仮説が成立 $\mu = \mu_0$	偽陽性，第 1 種の過誤 この箱の中はほぼない ($\alpha = 0.01$ or 0.05) と思ってる	真陰性

- 有意水準 $\alpha = \frac{\text{偽陽性}}{\text{偽陽性}+\text{真陰性}} = \frac{\text{正常}}{\text{検査薬発色}}$. 小さいほど，よい，というか発色したら間違いない検査薬．
- 検出力 $1-\beta$, $\beta = \frac{\text{偽陰性}}{\text{偽陰性}+\text{真陽性}} = \frac{\text{正常でない}}{\text{検査薬発色しない}}$. 小さいほど，よい，というか発色しなかったら間違いない検査薬．敏感な検査薬．

検定の中の仕組み

標本 $X \overset{\text{A 検定},y_A}{\longmapsto}$ 検定統計量 $y_A(X)$ の実現値

- 帰無仮説 (正常値) の設定
- $y_A(X)$ の実現値が境目を越えて大きすぎたり小さすぎたりしたら (検定統計量の実現値が棄却域にはいったら) '発色'
- その境い目は, 有意水準 α を指定して表から決める. $\alpha = 0.01, 0.05$ と小さく取り, 第 1 種の過誤は存在しないかのような態度をとる.

みんな性能のよい (α, β の小さい) y(検定) を本から探したり, 自分で作ったりしてる.

レポートや論文での検定の書き方

1. 「有意水準 $\alpha = \cdots$ で」「…検定を行う」(2,3 を名前で予告する)
2. 「帰無仮説を…とする, 対立仮説を…とする」
3. 「帰無仮説のもとで検定統計量 Y は …分布にしたがう」
4. 「この標本に対してナントカ検定統計量の実現値は $y = \cdots$ である」
5. (棄却域の境い目の値を計算しておく)
6. 「y 不等号 (境い目) より帰無仮説を棄却する/棄却できない」「よって母ナントカは…である (とはいえない)」

ここまで来たよ

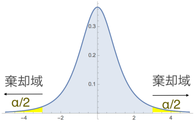
12 略解:母平均値の統計的仮説検定

13 母比率・母分散の両側/片側検定
- 統計的仮説検定の考え方
- 母比率の検定 (二項検定の正規近似)
- 不偏標本分散のちらばりとカイ二乗分布
- 母分散の検定

母比率の検定 (二項検定の正規近似) 前園確率統計 6.6

母比率の両側検定

- 帰無仮説 母比率 $p = p_0$, 対立仮説 $p \neq p_0$.
- 検定統計量 $Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \times \sqrt{n}$ は標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ にしたがう．ここで $\hat{p}$ は標本比率.
- 棄却域 $|z| > t(\infty; \alpha/2) = Z_{\alpha/2}$.



L13-Q1

Quiz(母比率の両側二項検定の正規近似)

瀬田学舎生のうち, 滋賀県の高校を卒業した人の母比率は $p \neq 0.4$ である, ことを示すため, サイズ 68 の標本を抽出したところ, 20 名が滋賀県の高校を卒業していた. $p \neq 0.4$ は結論できるか?

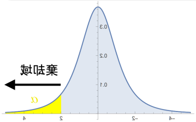
前園確率統計例題 6.8, 演習問題 6.2(片側)

母比率の片側検定 (二項検定の正規近似) 前園確率統計 6.6

さっきのは不自然な問題設定．ふつうは $p \neq 0.5$ でなく $p > 0.5$ と言いたいでしょう．そういうときは, 帰無仮説は同じで, (ここでやった) 両側検定のかわりに片側検定をする．

母比率の片側検定

- 帰無仮説 母比率 $p = p_0$, 対立仮説 $p > p_0$ (または $p < p_0$)
- 検定統計量 $Z = \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \times \sqrt{n}$ は標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ にしたがう．ここで $\hat{p}$ は標本比率．
- 棄却域 $z > t(\infty; \alpha) = Z_\alpha$. (または $z < -Z_\alpha$).



片側検定と両側検定

両側検定のときは, 両側に $\alpha/2$ ずつの棄却域ができる．いずれかにはいったら帰無仮説を棄却．

以前にやった t 検定にも両側検定 (やった) と片側検定がある．

L13-Q2

Quiz(母比率の片側二項検定の正規近似)

瀬田学舎生のうち, 滋賀県の高校を卒業した人の母比率は $p < 0.4$ である, ことを示すため, サイズ 68 の標本を抽出したところ, 20 名が滋賀県の高校を卒業していた. $p < 0.4$ は結論できるか?

ここまで来たよ

12 略解:母平均値の統計的仮説検定

13 母比率・母分散の両側/片側検定
- 統計的仮説検定の考え方
- 母比率の検定 (二項検定の正規近似)
- 不偏標本分散のちらばりとカイ二乗分布
- 母分散の検定

$Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$ (標準正規分布) のとき

$X_1 = 2Z$

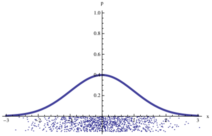
$X_2 = Z + 3$

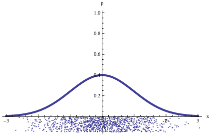
$X_3 = 2Z + 3$

$W_k = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_k$

$Y_1 = Z^2$
(注:$\mathrm{V}[Z] = \mathrm{E}[Z^2] - 0^2$)

$Y_2 = Z_1^2 + Z_2^2$
$\vdots$
$Y_k = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_k^2$





カイ二乗分布 前園確率統計 p.36

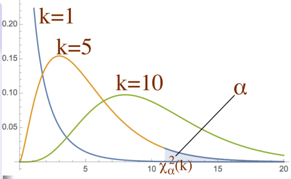
カイ二乗分布

$Z_1, \ldots, Z_k$, を標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ に従う独立な確率変数とするとき,
確率変数 $Y = Z_1^2 + \cdots + Z_k^2$ とおく.
Y は, 自由度 k のカイ二乗分布 $\chi^2(k)$ に従う.

言語	小	大	読み
英語	x	X	エクス
ギリシャ語	χ	X	カイ

$\chi^2(k)$ の確率密度関数 前園確率統計 p.36

$$f_k(y) = \begin{cases} C_k \times y^{\frac{k}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y} & (y \geq 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$



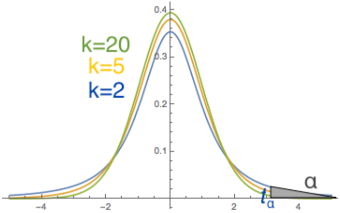
$\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[Z_1^2 + \cdots + Z_k^2] = k, \mathrm{V}[Y] = \text{積分} = 2k.$

t 分布とカイ二乗分布の関係

t 分布 前園確率統計 p.38

確率変数 Z が標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1^2)$, 確率変数 Y が自由度 k のカイ二乗分布 $\chi^2(k)$ にしたがい, Z と Y が独立であるとき, 連続型確率変数 $T = \frac{Z}{\sqrt{Y/k}}$ のしたがう分布を自由度 k の (スチューデントの, またはゴセットの)t 分布という.

だから, 標本平均値 $\overline{X}$ から作った統計量 $T = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{s^2}} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}}{\sqrt{\frac{s^2}{\sigma^2}}} = \frac{Z}{\sqrt{Y/k}}$ は t 分布にしたがう.



k が小さいとずれが大きいが, $k \to +\infty$ では Y と Z はほぼ同じ.

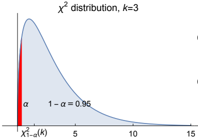
ここまで来たよ

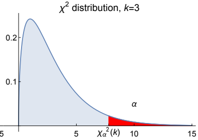
母分散のカイ二乗検定 (母平均値未知) 前園確率統計 §6.2 I

未知の正規分布からの標本に基づき, 母分散が σ_0^2 かどうか判定したい!($\sigma^2 > \sigma_0^2$ と言いたい, または $\sigma^2 < \sigma_0^2$ と言いたい)

母分散の片側カイ二乗検定

- 帰無仮説 母分散 $\sigma^2 = \sigma_0^2$, 対立仮説 $\sigma^2 > \sigma_0^2$.
- 検定統計量 $Y = (n-1) \times \frac{s^2}{\sigma_0^2}$ は自由度 $n-1$ のカイ二乗分布にしたがう. 前園確率統計定理 2.3
- 棄却域 $Y > \chi^2(n-1; \alpha)$.





L13-Q3

Quiz(母分散の片側カイ二乗検定)

あるファーストフードチェーンのポテトフライ S の重さは, 母分散が $4\mathrm{g}^2$ であることが定められているという.
トレーニング中のアルバイトの人に, ポテトフライ S サイズを 9 個作ってもらったところ, 重さは下のようだった (単位は g).

$$76, 76, 76, 76, 80, 84, 84, 84, 84.$$

このアルバイトの作るポテトフライ S の重さの母分散 σ^2 は, $2^2\mathrm{g}^2$ より大きいか? 重さが正規分布にしたがうと仮定し, 有意水準 $\alpha = 0.05$ で, 母分散のカイ二乗検定で判定しよう.

前園確率統計例題 6.2

連絡

Moodle
https://learn.math.ryukoku.ac.jp/

Moodle モバイルアプリ
https://download.moodle.org/mobile
起動後, URL https://learn.math.ryukoku.ac.jp/moodle を登録

GeoGebra 確率電卓
https://www.geogebra.org/classic#probability

- 予習復習問題を, 期限後も (再/初) 受験できます. 点数にはカウントしないけど, プチテスト準備に活用してね.
- 教科書の有意確率 (=p-値) 前園確率統計 p.90 あたり読んでおいてね.
- 次回は Excel と p 値 とカイ二乗検定
- 配布資料は 1-503 向かいの引出, http://hig3.net で再配布.
- 樋口オフィスアワー火昼 (1-539) 金 14:40-15:40(1-502), Math ラウンジ月-木昼 (1-614)

ファイナルトライアル出題計画 別紙参照.
過去問題を公開していますが, 出題傾向は毎年変わります. 去年のものに対応するより, 下の出題計画と Trial を参照することをお奨めします.