母分散の区間推定・t 分布

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 II　L12(2015-07-03 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2015-07-03 Fri 19:29 JST hig"

今日の目標

- 標本から正規分布の母分散を区間推定できる
- t 分布の確率を表から求められる

hig3.net

L11-Q1

Quiz 解答:指数分布

間隔 X 分 は, パラメタ $\alpha = 0.05/$ 分の指数分布にしたがう (または間隔 X ゲーム は, パラメタ $\alpha' = 4.5/$ ゲームの指数分布にしたがう).

1. $\int_0^{+\infty} \alpha \mathrm{e}^{-\alpha x}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} = 20$ 分
2. $\int_0^5 \alpha \mathrm{e}^{-\alpha x}\, \mathrm{d}x = [-\mathrm{e}^{-\alpha x}]_0^5 = 1 - \mathrm{e}^{-0.25} = 0.221.$
3. $\int_{15}^{25} \alpha \mathrm{e}^{-\alpha x}\, \mathrm{d}x = [-\mathrm{e}^{-\alpha x}]_{15}^{25} = 0.186.$

L11-Q2

Quiz 解答:カイ 2 乗分布

$T = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2$ とする.

1. T は自由度 $n = 3$ のカイ 2 乗分布にしたがう.
   $\mathrm{E}[T] = 3, \mathrm{V}[T] = 2 \cdot 3.$
2. 表の $n = 3, \alpha = 0.05$ の行を見て, $a = 7.815.$
3. 表の $n = 2, \alpha = 0.99$ の行を見て, $b = 0.02010.$

ここまで来たよ

1. 略解: 指数分布・カイ 2 乗分布
2. 母分散の区間推定・t 分布
   - カイ 2 乗分布
   - カイ 2 乗分布を利用した区間推定と検定
   - t 分布

カイ 2 乗分布

つぎの確率密度関数をもつ連続型確率変数 Y を，自由度 n のカイ 2 乗分布 $\mathrm{Ga}(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ にしたがうという．

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{C_n} y^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{y}{2}} & (y > 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

ただし，$C_n = \int_0^\infty y^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{y}{2}} \mathrm{d}y$.

f は偶関数ではない．カイ 2 乗分布は対称分布ではない．対称軸もない．

カイ 2 乗分布のモーメント母関数と期待値

Y が自由度 n のカイ 2 乗分布にしたがうとき，

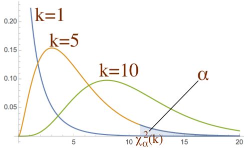
$$M_Y(\lambda) = (1 - 2\lambda)^{-\frac{n}{2}}$$

$$\mathrm{E}[Y] = \boxed{}, \qquad \mathrm{V}[Y] = \boxed{}$$

χ^2 分布表

$\alpha = P(\chi^2 > \chi^2_\alpha(k))$.

$k\backslash\alpha$	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.00003927	0.0001571	0.0009821	0.003932	0.01579	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.01003	0.02010	0.05064	0.1026	0.2107	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60
3	0.07172	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.064	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.145	1.610	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.6757	0.8721	1.237	1.635	2.204	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.9893	1.239	1.690	2.167	2.833	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.844	7.633	8.907	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.434	8.260	9.591	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2



L12-Q1

Quiz(カイ 2 乗分布)

正規分布 $\mathrm{N}(0, 2^2)$ にしたがう独立な確率変数 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 を考える.

1. $\mathrm{E}[\frac{1}{5}[X_1^2 + \cdots + X_5^2]], \mathrm{V}[\frac{1}{5}[X_1^2 + \cdots + X_5^2]]$ を答えよう.
2. $P(\frac{1}{5}[X_1^2 + \cdots + X_5^2] > a) = 0.05$ となる a の値を求めよう.
3. $P(\frac{1}{5}[X_1^2 + \cdots + X_5^2] < b) = 0.01$ となる b の値を求めよう.

を求めよう.

ここまで来たよ

1. 略解: 指数分布・カイ 2 乗分布
2. 母分散の区間推定・t 分布
   - カイ 2 乗分布
   - カイ 2 乗分布を利用した区間推定と検定
   - t 分布

正規分布とカイ 2 乗分布

母平均値 μ, 母分散 σ^2 の正規分布にしたがう独立な確率変数 X_i $(i = 1, \ldots, n)$ に対して,

$$n \times \frac{1}{n}\left[\left(\frac{X_1 - \mu}{\sigma}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_n - \mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

は自由度 n のカイ 2 乗分布にしたがう.

正規分布とカイ 2 乗分布

母平均値 μ, 母分散 σ^2 の正規分布にしたがう独立な確率変数 X_i $(i = 1, \ldots, n)$ に対して,

$$\frac{n-1}{\sigma^2} \times \text{不偏標本分散}\, S^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} \times \frac{1}{n-1} \left[\left(X_1 - \overline{X}\right)^2 + \cdots + \left(X_n - \overline{X}\right)^2 \right]$$

は自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布にしたがう.
ここで, $\overline{X}$ は標本平均値 $\frac{1}{n}[X_1 + \cdots + X_n]$.

自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布で，上下の極端なケース各 $\alpha/2$ を除いた部分にはいる確率は，

$$P(a < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < b) = 1-\alpha$$

ここで，表の記号を使うと，$a = \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), b = \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$.
確率の中の不等式を，σ^2 の範囲を表すように書き直すと，

$$P(a < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < b) = \quad P(\frac{(n-1)S^2}{b} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{a}) = 1-\alpha$$

母分散の区間推定

正規分布にしたがう確率変数 X のサイズ n の標本の不偏標本分散が S^2 であるとき，母分散 $\sigma^2 = \mathrm{V}[X]$ の信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は，

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}$$

L12-Q2

Quiz(母分散の区間推定)

あるファーストフードチェーンのポテトフライ S の重さは正規分布に従うという.
お店で 9 個のポテトフライ S サイズを買って重さを量ったところ, 下のようだった (単位は g).

$$78, 78, 78, 78, 80, 82, 82, 82, 82$$

母平均値と母分散を信頼係数 $1-\alpha = 0.95$ で区間推定しよう.

L12-Q3

Quiz(母分散の検定)

あるファーストフードチェーンのポテトフライ S の重さは, 母分散 $\sigma_0^2 = 4\mathrm{g}^2$ の分布であることが定められているという.
トレーニング中のアルバイトの人に, ポテトフライ S サイズを 9 個作ってもらったところ, 重さは下のようだった (単位は g).

$$76, 76, 76, 76, 80, 84, 84, 84, 84.$$

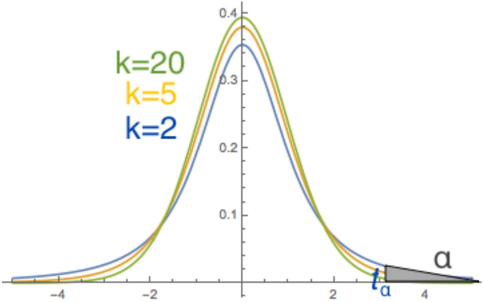
このアルバイトの作るポテトフライ S の重さの母分散 σ_1^2 は, σ_0^2 と異なるか? アルバイトのほうの重さが正規分布にしたがうと仮定し, 有意水準 5% で, 母分散の χ^2 検定で判定しよう.

ここまで来たよ

1. 略解: 指数分布・カイ 2 乗分布
2. 母分散の区間推定・t 分布
   - カイ 2 乗分布
   - カイ 2 乗分布を利用した区間推定と検定
   - t 分布

t 分布

確率変数 Z が標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1^2)$, 確率変数 Y が自由度 n のカイ 2 乗分布 $\mathrm{Ga}(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$ にしたがい, Z と Y が独立であるとき, 連続型確率変数 $T=\dfrac{Z}{\sqrt{Y/n}}$ のしたがう分布を自由度 n の (スチューデントの, またはゴセットの)t 分布という.

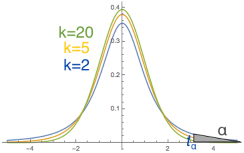


$n\to+\infty$ では Y と Z はほぼ同じ. n が小さいとずれが大きい.

t 分布表

$\alpha = P(T > t_\alpha(k))$ となる, $t_\alpha(k)$ の値の表. k は自由度.

$k\backslash\alpha$	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.00025
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	0.816	1.080	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
$+\infty$	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291



標本平均値・標本分散と t 分布

標準化された標本平均値は t 分布にしたがう

母平均値 μ, 母分散 σ^2 の独立同分布にしたがう確率変数 X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ から作った確率変数

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} \left(= \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\frac{1}{n-1}}} \right)$$

は, 自由度 $n-1$ の t 分布にしたがう. ただし,

$$\begin{aligned} \text{標本平均値}\overline{X} &= \frac{1}{n}[X_1 + \cdots + X_n], \\ \text{標本分散 } S^2 &= \frac{1}{n-1}[(X_1 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_n - \overline{X})^2] \end{aligned}$$

なぜなら, 最右辺で分子 $Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$, 分母の $Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \mathrm{Ga}(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2})$.

L12-Q4

Quiz(t 分布)

1. T を自由度 5 の t 分布にしたがう確率変数とする. $P(|T| < a) = 0.95$ となる a を求めよう.
2. T を自由度 7 の t 分布にしたがう確率変数とする. $P(T > -4.029)$ を求めよう.

L12-Q5

Quiz(t 分布)

1. X_1 を正規分布 $\mathrm{N}(0,2^2)$, X_2 を正規分布 $\mathrm{N}(0,3^2)$ にしたがう独立な確率変数とする. $P\left(\frac{X_1}{|X_2|} < b\right) = 0.99$ となる b を求めよう.
2. X_i を正規分布 $\mathrm{N}(0,2^2)$ にしたがう独立な確率変数とする. $P(\frac{X_1}{\sqrt{X_2^2+X_3^2+X_4^2}} < a) = 0.95$ となる a を求めよう.

Math ラウンジ=チューター
月火水木昼, 1-614
各科目のレポート, 課題などその他の質問・相談歓迎です.
スケジュール
2015-07-31 金 5 ファイナルトライアル 50 ピーナッツ 外部記憶ペーパー使用可
e ラーニング予習問題 x2 2015-07-02 木 23:55 締切
非参照 Quiz x 2 2015-07-03 金 5

manaba 出席カード提出
`https://attend.ryukoku.ac.jp`