確率統計☆演習 II プチテスト

樋口さぶろお [1]
配布: 2016-06-09 木更新: Time-stamp: "2016-07-11 Mon 14:11 JST hig"

プチテスト参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

離散型確率変数 X, Y の同時分布 $P(X=x, Y=y)$ は次の表で与えられる.

$y\backslash x$	2	3
2	2/12	4/12
3	5/12	1/12

1. 条件付き確率 $P(X=3|Y=3)$ を求めよう.
2. 条件付き確率 $P(Y=3|X=2)$ を求めよう.

2

確率変数 X は値 $x=1,2$, 確率変数 Y は値 $y=10,20$ をとり,

$$\begin{aligned} P(Y=10) &= \tfrac{3}{5}, \\ P(Y=20) &= \tfrac{2}{5}, \\ P(X=1|Y=10) &= \tfrac{1}{6}, \\ P(X=2|Y=10) &= \tfrac{5}{6}, \\ P(X=1|Y=20) &= \tfrac{2}{3}, \\ P(X=2|Y=20) &= \tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

である.

1. X, Y の同時確率を求めて表に書こう (過程不要).
2. $P(Y=20|X=1)$ を求めよう.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

3

ある小学校の小学生からサイズ 12 の標本を抽出し, 血液型 (A,B,O,AB), 右利きかどうかで分類して 4×2 の分割表を作り, ピアソンの χ^2 を計算する.

血液型と利き手に関係があるかどうかを判定するため, 有意水準 $\alpha = 0.05$ で独立性の検定を行う.

1. 帰無仮説のもとで, ピアソンの χ^2 はどのような分布にしたがうか (過程不要).
2. $\chi^2 = 3$ のとき,「血液型と利き手は独立である」, という帰無仮説は棄却されるか. その結果, 血液型と利き手の関係については何が言えるか. 「不等式○○○が成立するので, 帰無仮説は棄却される/されない, よって血液型と利き手には関係が…」のように答えよう.

4

離散型確率変数 X は次に従う.

$$P(X=x) = \begin{cases} +\frac{1}{7} & (x=-3) \\ +\frac{2}{7} & (x=0) \\ +\frac{4}{7} & (x=+3) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. X のモーメント母関数 $M_{\mathrm{X}}(t)$ を求めよう.
2. $Y = 2X$ とする. モーメント母関数 $M_{\mathrm{Y}}(t)$ を求めよう.

5

X は自由度 2 の カイ二乗分布 $\chi^2(2)$ 分布にしたがう. モーメント母関数は $M_{\mathrm{X}}(t) = (1-2t)^{-1}$ である,

モーメント $\mathrm{E}[X^1], \mathrm{E}[X^2], \mathrm{E}[X^3]$ を求めよう.

6

独立な確率変数 X, Y は下の確率分布にしたがう.

$$P(X=x) = \begin{cases} 5/8 & (x=0) \\ 1/8 & (x=-2) \\ 2/8 & (x=-4) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}, \quad P(Y=y) = \begin{cases} 6/8 & (y=0) \\ 2/8 & (y=2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

確率変数 $Z = X + Y$ を考える.

1. 確率変数 Z のしたがう確率分布を求めよう.
2. 母平均値 $\mathrm{E}[Z]$ を求めよう.

7

過程不要

確率変数 $X_1, \ldots, X_{10}$ は $\mathrm{E}[X_i] = 3, \mathrm{V}[X_i] = 7$ の独立同分布に従う.

1. $n = 10$ が大きいと思うと, 確率変数 $A = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{10}$ は近似的にどのような分布に従うか, '母平均値が$\boxed{}$, 母分散が$\boxed{}$の$\boxed{}$分布' のように答えよう.
2. $n = 10$ が大きいと思うと, 確率変数 $B = \frac{1}{10}(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{10}) - 3$ は近似的にどのような分布に従うか, '母平均値が$\boxed{}$, 母分散が$\boxed{}$の$\boxed{}$分布' のように答えよう.

8

正規分布に従う独立な確率変数 $X_1 \sim \mathrm{N}(1, 2^2)$, $X_2 \sim \mathrm{N}(3, 4^2)$ を考える.
$Y = -3X_1 + 5X_2 - 7$ はどのような分布にしたがうか. 母平均値$\boxed{}$, 母分散$\boxed{}$ の$\boxed{}$分布のように答えよう.

9

確率変数 Y_2, Y_4 は, 独立で, それぞれ自由度 $2, 4$ のカイ二乗分布にしたがう. なお, 自由度 2 のカイ二乗分布のモーメント母関数は $M_{Y_2}(t) = (1 - 2t)^{-1}$ であることを利用してもよい.

1. $\mathrm{E}[Y_2 + Y_4]$ を求めよう.
2. $P(Y_2 + Y_4 > a) = 0.01$ となる a の値を求めよう.

10

過程不要

標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ にしたがう確率変数 Z, 自由度 4 のカイ二乗分布にしたがう確率変数 Y を考える. これらは独立であるとする.

1. $W = \frac{Z}{\sqrt{Y/4}}$ はどのような分布にしたがうか.
2. $P\left(\frac{Z}{\sqrt{Y}} > a\right) = 0.05$ となる a の値を求めよう.

$\boxed{\text{別紙に正規分布, カイ二乗分布, t 分布の数表}}$

確率統計☆演習 II プチテスト略解

樋口さぶろお [2] 配布: 2016-06-09 木更新: Time-stamp: "2016-07-11 Mon 14:11 JST hig"

これは, 一部の過程のみ記した略解です. プチテストで, 受講者はすべての過程を記す必要があります.

配点 1-10 各 10 点, 計 100 点.

1

1. $\frac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{12}+\frac{1}{12}} = \frac{1}{6}$.
2. $\frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{12}+\frac{5}{12}} = \frac{5}{7}$.

配点 1,2:各 5 点, 計 10 点.

2

1.

$y\backslash x$	1	2
10	$\frac{3}{30}$	$\frac{15}{30}$
20	$\frac{8}{30}$	$\frac{4}{30}$

2. $P(Y=20|X=1) = \frac{\frac{8}{30}}{\frac{3}{30}+\frac{8}{30}} = \frac{8}{11}$.

配点 1:8 点,2:2 点, 計 10 点.

3

1. χ^2 は 自由度 $(4-1)(2-1)=3$ のカイ二乗分布にしたがう.
2. $3 < \chi^2_{0.05}(3) = 7.815$ が成立するので, 帰無仮説は棄却されない. よって血液型と利き手に関係があるとはいえない.

配点 1:4 点, 2:6 点 (不等式…帰無仮説…に 4 点, 関係に 2 点, 誤りがあったらその後は加点しない).

講評 分布を 1 個指定するには自由度も指定することが必要. 一方, 有意水準は分布を決める情報ではない.

帰無仮説を棄却できないときは, 何も主張できないので, 「関係がない」「独立である」ことは結論できない. 「関係があるとはいえない」

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

4

1. $M_{\mathrm{X}}(t) = \frac{1}{7}\mathrm{e}^{-3t} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7}\mathrm{e}^{3t}$
2. $M_{\mathrm{Y}}(t) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{2Xt}] = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{X(2t)}] = M_{\mathrm{X}}(2t) = \frac{1}{7}\mathrm{e}^{-6t} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7}\mathrm{e}^{6t}$.

Remark　X と X は独立ではないので, $Y = X + X$ だからといって $M_Y(t) = M_X(t) \times M_X(t)$ とはならない.

配点　1,2:各 5 点, 計 10 点.

5

等比級数の公式から $M_{\mathrm{X}}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(2t)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathrm{E}[X^k]t^k$ であり, $\mathrm{E}[X^k] = 2^k k!\ (k \geq 0)$.
よって, $\mathrm{E}[X^1] = 2, \mathrm{E}[X^2] = 8, \mathrm{E}[X^3] = 48$.

6

1.
$$P(Z=z) = \begin{cases} \frac{2}{8}\cdot\frac{6}{8} = \frac{12}{64} & (z=-4) \\ \frac{1}{8}\frac{6}{8} + \frac{2}{8}\frac{2}{8} = \frac{10}{64} & (z=-2) \\ \frac{5}{8}\frac{6}{8} + \frac{1}{8}\frac{2}{8} = \frac{32}{64} & (z=0) \\ \frac{5}{8}\frac{2}{8} = \frac{10}{64} & (z=2) \\ 0(\text{他}) \end{cases}.$$
2. $\mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y] = ((-2)\cdot\frac{1}{8} + (-4)\cdot\frac{2}{8}) + (2\cdot\frac{2}{8}) = \frac{-6}{8}$.

配点　1:4 点, 2:6 点 (不等式…帰無仮説…に 4 点, 関係に 2 点, 誤りがあったらその後は加点しない).

7

独立同分布にしたがう多数の確率変数の和なので, 近似的に正規分布にしたがう.

1. A は母平均値が 30, 母分散が 70 の正規分布 $\mathrm{N}(30, 70)$ に従う.
2. B は母平均値が 0, 母分散が $70/100$ の正規分布 $\mathrm{N}(0, \frac{7}{10})$ に従う.

配点　1,2:各 5 点, 計 10 点.

8

$-3X_1 \sim \mathrm{N}(-3, 6^2), 5X_2 \sim \mathrm{N}(15, 20^2)$ なので, 正規分布の再生性より $W = -3X_1+5X_2$ も正規分布にしたがう.

$Y = -3X_1 + 5X_2 - 7$ は, W の確率密度関数を平行移動しただけなのでやはり正規分布にしたがう.

Y は母平均値 $-3 \cdot 1 + 5 \cdot 3 - 7 = 5$, 母分散 $(-3)^2 2^2 + 5^2 4^2 = 436$ の正規分布にしたがう.

配点　母平均値:3 点, 母分散:4 点, 分布:3 点, 計 10 点.

講評　過程ありの問なので, 母平均値, 母分散を求めるだけでなく, なぜ正規分布になるのかを説明する必要があります.

9

カイ二乗分布の再生性より, $Y = Y_2 + Y_4$ は自由度 6 のカイ二乗分布にしたがい, そのモーメント母関数は, $M_{\mathrm{Y}}(t) = (1-2t)^{-1}((1-2t)^{-1})^2 = (1-2t)^{-3}$ である.

1. $\mathrm{E}[Y] = 6.$
2. カイ二乗分布表の自由度 $k = 6$ の行を参照して, $a = 16.81.$

配点　1,2:各 5 点, 計 10 点.

講評　過程ありの問なので, $Y_2 + Y_4$ が自由度 6 のカイ二乗分布にしたがうことが, 理由とともに示されている必要があります.

10

1. t 分布の定義から, 自由度 4 の t 分布.
2. t 分布表の自由度 $k = 4$ の行を参照して, $P\left(\frac{Z}{\sqrt{Y/4}} > 2.132\right) = 0.05.$　よって, $a = 2.132/2 = 1.066.$

配点　1,2:各 5 点, 計 10 点.

講評　t 分布やカイ二乗分布の場合, 自由度までを指定しないと, 分布を答えたことになりません.