確率統計☆演習 II ファイナルトライアル

樋口さぶろお [1] 配布: 2016-08-04 木更新: Time-stamp: "2016-08-16 Tue 01:26 JST hig"

ファイナルトライアル参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

(1)

次の 2 変数確率密度関数は, 2 次元正規分布を定める. ただし C_1 は定数である.

$$f_1(x,y) = C_1 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(9x^2+36x+4y^2-24y+1)}.$$

X, Y の母平均値, 母分散, 母共分散を求めよう. ただし, 定義にしたがって積分せずに, 式の形から答えてよい.

(2)

次の 2 変数確率密度関数は, 2 次元正規分布を定める. ただし C_2 は定数である.

$$f_2(x,y) = C_2 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(5x^2-2xy+3y^2)}.$$

X, Y の母平均値はともに 0 である. X, Y の母分散, 母共分散を求めよう. ただし, 定義にしたがって積分せずに, 式の形から答えてよい.

2

表が確率 $\frac{4}{13}$, 裏が確率 $\frac{9}{13}$ ででるコインを, くり返し投げる.

1. $13^2 = 169$ 回投げるとき, 表がでる回数を確率変数 X とする. X のしたがう分布を (1 つの分布が特定できるように) 答えよう. $\mathrm{E}[X].\mathrm{V}[X]$ を求めよう.
2. 表が出る回数 $X > 64$ となる確率を, 正規分布表を用いて近似的に求めよう.
3. 表が初めてでるのが Y 回目 $(Y = 1, 2, 3, \ldots)$ とする. Y のしたがう分布を (1 つの分布が特定できるように) 答えよう. $\mathrm{E}[Y]$ を求めよう.
4. 表が初めてでるのが $Y = k$ 回目 $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ となる確率を求めよう.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

3

あるバスケットボールチームは, 1 分に 0.6 回の頻度でゴールを得る．ゴールは独立に起きると仮定する (つまりゴール直後は相手ボールになるとかは無視する)．また, 無限回のゲームをつなげて考える.

1. ゴールとゴールの時間間隔のしたがう分布を (1 つの分布が特定できるように) 答えよう．時間間隔の母平均値と母分散を求めよう.
2. 1 分間のゴールの回数のしたがう分布を (1 つの分布が特定できるように) 答えよう．回数の母平均値と母分散を求めよう.
3. ゴールとゴールの時間間隔が 3 分以上である確率を求めよう.
4. 1 分間に 2 回のゴールを得る確率を求めよう.

4

ドーナツ製造マシン A の設計を変更してしてドーナツ製造マシン B とした．A,B で製造されるドーナツの重さはいずれも正規分布にしたがう．それぞれの母分散を σ_A^2, σ_B^2 とする.

この設計変更により, A,B の製造するドーナツの重さのばらつきは変化した可能性がある.

A で 10 個のドーナツを製造したところ, 不偏標本分散は $21\mathrm{g}^2$ だった.

B で 8 個のドーナツを製造したところ, 不偏標本分散は $10\mathrm{g}^2$ だった.

A の製造するドーナツの重さの正規分布の母分散のほうが大きいかどうか判定したい.

帰無仮説を $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$, 対立仮説を $\sigma_A^2 > \sigma_B^2$ として, 有意水準 $\alpha = 0.05$ で片側 F 検定を行い, 「不等式○○○より, 帰無仮説を×××, よって, 母分散は…結論…」の形で答えよう.

5

ドーナツ製造マシン 1 号に, 不純物を取り除く (はずの) 装置 B をとりつけてドーナツ製造マシン 1B 号とした.

1 号の作るドーナツ 1 個に含まれる不純物の量の母平均値は 120mg である.

1B 号の作るドーナツ 1 個に含まれる不純物の量の母平均値を μmg とする.

1B 号の作るドーナツの不純物の量を実際に測定したところ, 次のような標本を得た.

- 標本サイズ 16
- 標本平均値 $117\mathrm{mg}^2$
- 不偏標本分散 $9\mathrm{mg}^2$

装置 B が本当に不純物を減らしているかどうか調べるために, 帰無仮説を $\mu = 120$, 対立仮説を $\mu < 120$ として, 有意水準 $\alpha = 0.01$ で片側 t 検定を行い, 「不等式○○○より, 帰無仮説を×××, よって, 不純物…結論…」の形で答えよう.

6

正規分布に従う独立な確率変数 $X \sim \mathrm{N}(2, 3^2)$, $Y \sim \mathrm{N}(-11, 4^2)$ を考える.

1. $S = X + Y$ とするとき, $\mathrm{E}[S], \mathrm{V}[S]$ を求め, S のしたがう分布を (1 つの分布が特定できるように) 答えよう.
2. $T = X - Y$ とするとき, $\mathrm{E}[T], \mathrm{V}[T]$ を求め, T のしたがう分布を (1 つの分布が特定できるように) 答えよう.

7

ドーナツ製造マシン 1 号,2 号が製造するドーナツの重さ X, Yg は, 独立で, それぞれ正規分布 $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2), \mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)$ にしたがう.

- 1 号で製造したドーナツの標本は, サイズ 7, 標本平均値 $100\mathrm{g}$, 不偏標本分散 $30\mathrm{g}^2$,
- 2 号で製造したドーナツの標本は, サイズ 13, 標本平均値 $92\mathrm{g}$, 不偏標本分散 $9\mathrm{g}^2$

だった.

1 号 2 号の作る母平均値が同じかどうか判定するため, 帰無仮説を $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, 対立仮説を $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ として有意水準 $\alpha = 0.05$ で 2 標本両側 t 検定を行い, 「不等式○○○より, 帰無仮説を×××, よって, 母平均値が…結論…」の形で答えよう.

8

あるドーナツチェーンの 4 個の支店で, オールドファッションドーナツを 3 個ずつ買ったところ, その重さ (g) は以下のようだった.

水準	データ		
石山支店	109	110	111
瀬田支店	108	110	112
南草津支店	107	110	113
草津支店	117	118	119

1. 分散分析表を作ろう.
2. 帰無仮説を, 各支店のドーナツの重さの母平均値が同じである, として, 必要に応じて追加の仮定をおいて, 有意水準 $\alpha = 0.05$ で F 検定を行い, 「不等式○○○より, 帰無仮説を×××, よって, 支店…結論…」の形で答えよう.

なお, 分散分析表とは以下のような表のことである. この紙に記入するのでなく答案用紙にこのような表を記すこと.

	平方和	自由度	平均平方	F
級間 A				
残差 E				記入しない欄
全 T			今回は記入不要	記入しない欄

別紙に正規分布, t 分布, F 分布, カイ二乗分布の数表

確率統計☆演習 II ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお [2] 配布: 2016-08-04 木更新: Time-stamp: "2016-08-16 Tue 01:26 JST hig"

これは, 一部の過程のみ記した略解です. 参加者はすべての過程を記す必要があります.

1

(1)

$$f_1(x,y) = C_1' \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(3^2(x+2)^2+2^2(y-3)^2)}$$

より, $\mathrm{E}[X] = -2, \mathrm{V}[X] = 1/3^2$, $\mathrm{E}[Y] = +3, \mathrm{V}[X] = 1/2^2$.

X, Y が独立であることがわかるので, $\mathrm{Cov}[X,Y] = 0$.

配点 各 1 点, 計 5 点.

(2)

指数関数の引数は,

$$-\tfrac{1}{2}(x^2+4xy+9y^2) = -\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と書けるので, $V^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

共分散行列 $V = \frac{1}{5\cdot 3-(-1)\cdot(-1)}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. よって, $\mathrm{V}[X] = \frac{3}{14}, \mathrm{V}[Y] = \frac{5}{14}$. $\mathrm{Cov}[X,Y] = \frac{1}{14}$.

配点 $V^{-1}, V, \mathrm{E}[X], \mathrm{E}[Y], \mathrm{Cov}[X,Y]$,:各 1 点, 計 5 点.

2

1. パラメタ $n = 169$, $p = \frac{4}{13}$ の二項分布 $\mathrm{B}(169, \frac{4}{13})$ にしたがう. $\mathrm{E}[X] = 169 \times \frac{4}{13} = 52$, $\mathrm{V}[X] = 169 \times \frac{4}{13}(1-\frac{4}{13}) = 36$.
2. $Z = \frac{X-52}{\sqrt{36}}$ は近似的に標準正規分布にしたがう. $P(X > 64) = P(Z > 2) = 0.0228$.
3. Y はパラメタ $p = \frac{4}{13}$ の幾何分布にしたがう. $\mathrm{E}[Y] = 1/p = \frac{13}{4}$.
4. $P(X = k) = \frac{4}{13}(\frac{9}{13})^{k-1}$. $(k = 1, 2, \ldots)$

配点 1:7 点, 2:5 点, 3,4:4 点, 計 20 点.

---

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

講評　1,3 で, 1 つの分布が特定できるように, とは, パラメタまで指定しようということです.

2 で, $1-Q(2)$ か, $Q(2)$ かで迷わないように図を描きましょう.

3 で幾何分布とわかってるのに, 4 で幾何分布の確率分布を書かないってどういうこと?

3

1. 時間間隔を分ではかると, $\lambda = 0.6$ の指数分布にしたがう. $\mathrm{E}[X] = 1/\lambda = 10/6$ 分, $\mathrm{V}[X] = 1/\lambda^2 = 100/36$ 分^2.
2. $\lambda = 0.6$ のポアソン分布にしたがう. $\mathrm{E}[X] = \mathrm{V}[X] = \lambda = 0.6$.
3. $\int_3^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-1.8}$.
4. $\frac{\lambda^2}{2!}\mathrm{e}^{-\lambda} = 0.18 \times \mathrm{e}^{-0.6}$.

配点　1-4:各 5 点, 計 20 点.

講評　1,2 で, 1 つの分布が特定できるように, とは, パラメタまで指定しようということです.

4

$F_{0.01}(10-1, 8-1) = 3.677 > 2.1 = \frac{21}{10} = F$ なので, 帰無仮説を棄却できない. よって, A の母分散のほうが大きいとは結論できない.

配点　計 10 点.

講評　対立仮説は「A の」「母分散が」…なので注意.

5

$T = \frac{117-120}{\sqrt{9/16}} = -4$. $t_{0.01}(16-1) = 2.602 < |-4| = T$ より, 帰無仮説を棄却する. よって装置 B によって不純物の量は減ったと結論する.

配点　計 10 点.

講評　小さい側の片側検定なので, 小さい側に極端, $T < t_{1-\alpha}(15) = -t_\alpha(15)$ ならば帰無仮説は棄却されます. t 分布が原点に関して対称なので. $|T| > t_\alpha(k)$ なら棄却と言っても同じこと.

6

1. $\mathrm{E}[S]=\mathrm{E}[X]+\mathrm{E}[Y]=-9$, X, Y が独立なので $\mathrm{V}[S]=\mathrm{V}[X]+\mathrm{V}[Y]=5^2$. 正規分布は再生性を持つので, S は正規分布 $\mathrm{N}(-9,5^2)$ にしたがう.
2. $\mathrm{E}[T]=\mathrm{E}[X]-\mathrm{E}[Y]=13$, X, Y が独立なので $\mathrm{V}[T]=\mathrm{V}[X]+(-1)^2\mathrm{V}[Y]=5^2$. $-Y$ は正規分布 $\mathrm{N}(11,4^2)$ にしたがい, 正規分布は再生性を持つので, T は正規分布 $\mathrm{N}(13,5^2)$ にしたがう.

配点　1,2 各 5 点. 計 10 点.

講評　プチテストでは, 正規分布と限らない独立な X, Y に対して $\mathrm{E}[aX+bY], \mathrm{V}[aX+bY]$ を正解してた人多かったような気がするけど…

7

プールした不偏標本分散は $\frac{(7-1)30+(13-1)9}{(7-1)+(13-1)}=4^2\mathrm{g}^2$. よって, 帰無仮説のもとで, $T=\frac{X-Y}{\sqrt{4^2(\frac{1}{13}+\frac{1}{7})}}$ は自由度 18 の t 分布にしたがう.

$T=\frac{100-92}{4\sqrt{20/91}}=\sqrt{91/5}>\sqrt{80/5}=4>2.101=t_{0.025}((7-1)+(13-1))$ より, 帰無仮説は棄却される, よって母平均値が異なると結論する.

配点　計 10 点.

8

1.

	平方和	自由度	平均平方	F
級間 A	144	3	48	48/(30/8)
残差 E	30	8	30/8	—
全 T	174	11		—

2. 各支店のドーナツの重さは, それぞれ, 同一の母分散の正規分布にしたがうと仮定する.
   帰無仮説のもとで, 比 F は, 自由度 $(3,8)$ の F 分布にしたがう.
   $F=12.8>F_{0.05}(3,8)=4.066$. よって, 帰無仮説を棄却する. ドーナツの重さの母平均値は支店によって, 異なると結論する.

配点　1:6 点, 2:4 点. 計 10 点.

講評　F 検定だから, 直接的には級間の母分散が異なるかどうかを考えているわけですが, 分散分析のサブルーチンである F 検定は, 帰無仮説は「母平均値がすべて等しい」で, 自動的に片側なので注意.