確率変数の独立性・ベイズの公式

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 II L02(2016-04-21 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2016-04-21 Thu 09:08 JST hig"

今日の目標

- 同時確率, 周辺確率, 条件付き確率の言葉で確率変数の独立性が説明できる. 確率統計☆演習 I(2015)L08
- 条件付き確率 $f_{\mathrm{Y}|\mathrm{X}}$ と $f_{\mathrm{X}|\mathrm{Y}}$ を変換するベイズの公式が使える
- ベイズの公式を推定に使える

http://hig3.net

L01 条件付き確率の性質 2' の誤記訂正

性質 2'(周辺確率との関係)

$$f_{\mathrm{X}}(x_i) = \sum_j f_{\mathrm{X|Y}}(x_i|y_j) f_{\mathrm{Y}}(y_j)$$

$$f_{\mathrm{Y}}(y_j) = \sum_i f_{\mathrm{Y|X}}(y_j|x_i) f_{\mathrm{X}}(x_i)$$

導出: 同時確率の式を加えて周辺確率を出した.

L01-Q1

Quiz 解答:多次元の確率変数の期待値

1. $\mathrm{E}[X+2Y] = 0\cdot(1+2\cdot 0) + \frac{2}{12}(2+2\cdot 0) + \frac{1}{12}(3+2\cdot 0) + \frac{4}{12}(1+2\cdot 2) + 0(2+2\cdot 2) + \frac{5}{12}(3+2\cdot 2) = \frac{62}{12}$.
2. $\mathrm{E}[\mathbf{1}_{[Y\geq 1]}(X,Y)] = 0\cdot 0 + \frac{2}{12}\cdot 0 + \frac{1}{12}\cdot 0 + \frac{4}{12}\cdot 1 + 0\cdot 1 + \frac{5}{12}\cdot 1 = \frac{9}{12}$.
3. $$f_{\mathrm{X}}(x) = \begin{cases} 4/12 & (x=1) \\ 2/12 & (x=2) \\ 6/12 & (x=3) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases} \qquad f_{\mathrm{Y}}(y) = \begin{cases} 3/12 & (y=0) \\ 9/12 & (y=2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

L01-Q2

Quiz 解答:条件付き分布

1. $f_{\mathrm{Y}|\mathrm{X}}(0|9) = \frac{f_{\mathrm{XY}}(9,0)}{f_{\mathrm{X}}(9)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$.

2. $f_{\mathrm{X|Y}}(9|0) = \frac{f_{\mathrm{XY}}(9,0)}{f_{\mathrm{Y}}(Y=0)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = \frac{1}{4}$.

L01-Q3

Quiz 解答:条件付き分布

赤を $Y = 0$, 黒を $Y = 1$ とする.
10 の札を $X = 10$ などとする.

1. 同時確率 $f_{\mathrm{XY}}(10,0) = f_{\mathrm{X|Y}}(10|0)f_{\mathrm{Y}}(0) = \frac{1}{10}\frac{1}{3} = \frac{1}{30}$.
2. 同様に, 黒の 10 が出る同時確率は,
   $f_{\mathrm{XY}}(10,1) = f_{\mathrm{X|Y}}(10|1)f_{\mathrm{Y}}(1) = \frac{1}{15}\frac{2}{3} = \frac{2}{45}$.
   よって, 周辺確率 $f_{\mathrm{X}}(10) = \sum_y f_{\mathrm{XY}}(10,y) = \frac{7}{90}$.

ここまで来たよ

独立性の定義

独立性

確率変数 X, Y が同時分布 $f_{\mathrm{XY}}(x,y)$ を持つとする.

$$X, Y \text{ が独立} \Leftrightarrow f_{\mathrm{XY}}(x,y) = f_{\mathrm{X}}(x) \times f_{\mathrm{Y}}(y)$$

(同値な定義が多数ある)

確率統計☆演習 I(2015)L08

直観的意味:独立とは, X,Y の値が互いに

例: 2 個のサイコロ, コイントスとくじ.

X, Y が独立であるとき 'だけ' 成立する性質 (復習)

X, Y は確率変数, ϕ_1, ϕ_2 は任意関数

確率統計☆演習 I(2015)L08

X, Y が独立であるとき 'だけ' 成立する性質

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\phi_1(X) \times \phi_2(Y)] =& \mathrm{E}[\phi_1(X)] \times \mathrm{E}[\phi_2(Y)] \\
\text{特に } \mathrm{E}[XY] =& \mathrm{E}[X] \times \mathrm{E}[Y] \\
\text{母共分散 } \mathrm{Cov}[X, Y](=& \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X] \times \mathrm{E}[Y]) = 0 \\
\mathrm{V}[X + Y] =& \mathrm{V}[X] + \mathrm{V}[Y]
\end{aligned}
$$

L02-Q1

Quiz(離散型確率変数の独立性)

2 次元の離散型確率変数 (X, Y) を考える．同時分布 $f_{\mathrm{XY}}(x, y)$ は次の表で与えられる (現れない X, Y の確率は zero である).

$y \backslash x$	2	3
3	$2/12$	$1/12$
7	A	B

1. X, Y が独立になるように, 実数 A, B を定めよう.
2. このとき, 条件付き確率 $f_{\mathrm{X|Y}}(x|7), f_{\mathrm{Y|X}}(y|2)$ を求めよう.

独立とは, 表で $\boxed{}$

独立のときの条件付き確率

X, Y が独立のとき

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = f_X(x),$$
$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = f_Y(y)$$

X, Y が独立のとき

- 条件付き確率 $f_{X|Y}(x|y)$ は y の値によらない.
- 条件付き確率は周辺確率に等しい $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$

意味: $\boxed{}$

ここまで来たよ

1. 多変数の確率分布

2. 確率変数の独立性・ベイズの公式
   - 独立性 (復習)
   - ベイズの公式

L02-Q2

Quiz(ベイズの公式)

確率変数 X は値 $x = 1, 2$, 確率変数 Y は値 $y = 10, 20$ をとり,

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{3}{4} & (x = 1) \\ \frac{1}{4} & (x = 2), \end{cases}$$

$$P(Y = y|X = 1) = \begin{cases} \frac{7}{10} & (y = 10) \\ \frac{3}{10} & (y = 20), \end{cases}, \quad P(Y = y|X = 2) = \begin{cases} \frac{2}{5} & (y = 10) \\ \frac{3}{5} & (y = 20). \end{cases}$$

1. 同時確率を求めて表に書こう.
2. $P(X = x|Y = 10)$ を求めよう.

ベイズの公式

ベイズの公式

$$
\begin{aligned}
f_{\mathrm{X}|\mathrm{Y}}(x|y) &= \frac{f_{\mathrm{Y}|\mathrm{X}}(y|x) f_{\mathrm{X}}(x)}{\sum_i f_{\mathrm{Y}|\mathrm{X}}(y|x_i) f_{\mathrm{X}}(x_i)}, \\
f_{\mathrm{Y}|\mathrm{X}}(y|x) &= \frac{f_{\mathrm{X}|\mathrm{Y}}(x|y) f_{\mathrm{Y}}(y)}{\sum_j f_{\mathrm{X}|\mathrm{Y}}(x|y_j) f_{\mathrm{Y}}(y_j)}.
\end{aligned}
$$

$f_{\mathrm{X}|\mathrm{Y}}(x|y)$ を $f_{\mathrm{Y}|\mathrm{X}}(y|x)$ (と $f_{\mathrm{X}}(x)$) で書き表す式, およびその逆の式.

L02-Q3

Quiz(ベイズの公式)

確率変数 X は値 $x = 1, 2$, 確率変数 Y は値 $y = 10, 20$ をとり,

$$f_{\mathrm{Y}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{5} & (y = 10) \\ \frac{4}{5} & (y = 20), \end{cases}$$

$$f_{\mathrm{X|Y}}(x|10) = \begin{cases} \frac{1}{3} & (x = 1) \\ \frac{2}{3} & (x = 2), \end{cases}, \quad f_{\mathrm{X|Y}}(x|20) = \begin{cases} \frac{4}{13} & (x = 1) \\ \frac{9}{13} & (x = 2). \end{cases}$$

1. $f_{\mathrm{Y|X}}(10|1)$ を求めよう.
2. $f_{\mathrm{Y|X}}(10|2)$ を求めよう.

L02-Q4

Quiz(ベイズの公式)

外見で区別できない, 甘い品種と渋い品種の柿がある.
品種 1 は, 確率 0.95 で赤に, 確率 0.05 で黄色になる.
品種 2 は, 確率 0.125 で赤に, 確率 0.875 で黄色になる.
確率変数 X, Y を用いて, 甘い品種を $X = 1$, 渋い品種 2 を $X = 2$, 赤を $Y = 10$, 黄色を $Y = 20$ と表現する.

1. 問題文から $P(Y = y|X = x)$ を読み取ろう.
2. かごの柿の $1/5$ が甘い柿であるとする. いま, 無作為に 1 個の柿を取りだしたところ, 赤い柿だった. ベイズの公式を使って, 取り出した赤い柿が甘い確率 $P(X = 1|Y = 10)$ を求めよう.
3. 仮にかごの柿の $1/5$ が渋い柿であるとする. いま, 無作為に 1 個の柿を取りだしたところ, 黄色い柿だった. ベイズの公式を使って, 取り出した黄色い柿が渋い確率を求めよう.

ベイズ的な考え方

$\boxed{\text{事後確率}\ f_{X|Y}(x|y)} \longleftarrow \boxed{\text{事前確率}\ f_X(x)}$

$\uparrow$

$\boxed{\text{情報}\ Y=y}$

主観確率

ベイズの定理=ベイズの公式 (+ニュアンス?)

L02-Q5

Quiz(ベイズ推定)

抽選用の袋に何個かの色つきボールが入っている．ボールを割ると，中に当たり外れの記された紙が入っている．
当たりのボールのうち赤いボールが $\frac{1}{10}$，白いボールが $\frac{9}{10}$ である．
外れのボールのうち赤いボールが $\frac{7}{10}$，白いボールが $\frac{3}{10}$ である．
最初に，色は気にせず当たり外れだけ考えると，当たりの確率は $\frac{2}{10}$ くらいかなと思っていた (事前確率).
無作為にボールを取り出したところ，赤いボールだった．このとき，外れである確率 (事後確率) はどれだけと思えるかを答えよう．
過程として同時確率の表を書くのを歓迎します．

統計検定とプチテストのお知らせ

- 統計検定申込受付中. 2016-05-09 月まで.
- プチテスト 30 ピーナッツで,
  - プチテストで 100 点の人は 30 ピーナッツを得ます.
  - 統計検定 2 級に合格した人は, プチテストの参加/点数によらず 30 ピーナッツを得ます.
  - 統計検定 2 級に合格しなかった人は, プチテストの点数 (100 点満点) の 1 倍と統計検定 2 級の点数 (100 点満点) の 1.5 倍のうち, 高いほうから 30 ピーナッツ分を計算します. 統計検定 2 級 (100 点満点) の点数の 2 倍, プチテスト (100 点満点) の 1 倍

  のうち大きい方で計算します.
- プチテストは 2016-06-09 木 2 を予定

お知らせ

- 次回非参照 Quiz はベイズ推定
- 次回は 1-542 実習室かも．教室変更通知に注意．
- 確率統計☆演習 I と同じセッティングで予習問題をやりましょう．
  http://hig3.net → RaMMoodle
  https://el.math.ryukoku.ac.jp/moodle/ → 確率統計☆演習 II(2016)
- チューター/Math ラウンジ 月火水木昼 1-614

https://manaba.ryukoku.ac.jp
マイページの下の方に
manaba 出席カード提出