適合度の検定

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 II L03(2016-04-28 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2016-04-28 Thu 13:29 JST hig"

今日の目標

- 文章題の状況で, 事前確率, 条件付き確率から, ベイズ推定ができる.
- カテゴリ変数の標本から, ピアソンの適合度基準 χ^2 が計算できる
- 適合度の検定ができる.

http://hig3.net

L02-Q1
Quiz 解答:離散型確率変数の独立性

1. 確率の和は 1 なので, $\frac{2}{12}+\frac{1}{12}+A+B=1$.
   よって,
   $$f_{\mathrm{Y}}(y)=\begin{cases}\frac{3}{12} & (y=3)\\ \frac{9}{12} & (y=7)\end{cases}$$
   独立性から,
   $$\begin{aligned} f_{\mathrm{XY}}(2,3) =& f_{\mathrm{X}}(2)\frac{3}{12}=\frac{2}{12}, \quad f_{\mathrm{XY}}(3,3)=f_{\mathrm{X}}(3)\frac{3}{12}=\frac{1}{12},\\ f_{\mathrm{XY}}(2,7) =& f_{\mathrm{X}}(2)\frac{9}{12}=A, \quad f_{\mathrm{XY}}(3,7)=f_{\mathrm{X}}(3)\frac{9}{12}=B. \end{aligned}$$
   $A, B, f_{\mathrm{X}}(2), f_{\mathrm{X}}(3)$ を未知数として解くと, $A=\frac{6}{12}$, $B=\frac{3}{12}$.
2. $$f_{\mathrm{X|Y}}(x|7)=\begin{cases}\frac{2}{3} & (x=2)\\ \frac{1}{3} & (x=3)\end{cases}, f_{\mathrm{Y|X}}(y|2)=\begin{cases}\frac{2}{5} & (y=3)\\ \frac{3}{5} & (y=7)\end{cases}$$

L02-Q2

Quiz 解答:ベイズの公式

1.

$y \backslash x$	1	2
10	21/40	4/40
20	9/40	6/40

2.

$$P(X = x|Y = 10) = \begin{cases} \frac{21}{25} & (x = 1) \\ \frac{4}{25} & (x = 2) \end{cases}$$

L02-Q3

Quiz 解答:ベイズの公式

$y \backslash x$	1	2
10	1/16	2/16
20	4/16	9/16

1.

$$f_{Y|X}(10|1) = \frac{f_{X|Y}(1|10)f_Y(10)}{f_{X|Y}(1|10)f_Y(10) + f_{X|Y}(1|20)f_Y(20)}$$
$$= \frac{\frac{1}{3}\frac{3}{16}}{\frac{1}{3}\frac{3}{16} + \frac{4}{13}\frac{13}{16}} = \frac{1}{5}.$$

2.

$$f_{Y|X}(10|2) = \frac{f_{X|Y}(2|10)f_Y(10)}{f_{X|Y}(2|10)f_Y(10) + f_{X|Y}(2|20)f_Y(20)}$$
$$= \frac{\frac{2}{3}\frac{3}{16}}{\frac{2}{3}\frac{3}{16} + \frac{9}{13}\frac{13}{16}} = \frac{1}{11}.$$

ここまで来たよ

1. 確率変数の独立性・ベイズの公式
   - ベイズ推定・ベイズの定理
2. 適合度の検定
   - カテゴリ変数とピアソンの適合度基準 χ^2
   - 適合度の検定

L03-Q1

Quiz(ベイズの公式)

外見で区別できない, 甘い品種 1 と渋い品種 2 の柿がある.
甘い品種 1 は, 確率 0.95 で赤に, 確率 0.05 で黄色になる.
渋い品種 2 は, 確率 0.125 で赤に, 確率 0.875 で黄色になる.
確率変数 X, Y を用いて, 甘い品種 1 を $X = 1$, 渋い品種 2 を $X = 2$, 赤を $Y = 10$, 黄色を $Y = 20$ と表現する.

1. 問題文から $P(Y = y|X = x)$ を読み取ろう.
2. かごの柿の $1/5$ が甘い柿であるとする. いま, 無作為に 1 個の柿を取りだしたところ, 赤い柿だった. ベイズの公式を使って, 取り出した赤い柿が甘い確率 $P(X = 1|Y = 10)$ を求めよう.
3. 仮にかごの柿の $1/5$ が渋い柿であるとする. いま, 無作為に 1 個の柿を取りだしたところ, 黄色い柿だった. ベイズの公式を使って, 取り出した黄色い柿が渋い確率を求めよう.

ベイズ的な考え方

$$\boxed{\text{事後確率 } f_{X|Y}(x|y)} \longleftarrow \boxed{\text{事前確率 } f_X(x)}$$

$$\uparrow$$

$$\boxed{\text{情報 } Y = y}$$

主観確率　　ベイズの定理=ベイズの公式 (+ニュアンス?)

L03-Q2

Quiz(ベイズ推定)

抽選用の袋に何個かの色つきボールが入っている．ボールを割ると，中に当たり外れの記された紙が入っている．
当たりのボールのうち赤いボールが $\frac{1}{10}$，白いボールが $\frac{9}{10}$ である．
外れのボールのうち赤いボールが $\frac{7}{10}$，白いボールが $\frac{3}{10}$ である．
最初に，色は気にせず当たり外れだけ考えると，当たりの確率は $\frac{2}{10}$ くらいかなと思っていた (事前確率)．
無作為にボールを取り出したところ，赤いボールだった．このとき，外れである確率 (事後確率) はどれだけと思えるかを答えよう．
過程として同時確率の表を書くのを歓迎します．

ここまで来たよ

カテゴリ変数

今回と次回は寄り道だけど実用的に重要な回
確率統計☆演習 II の主な対象=量的変数

- 離散型 確率関数=表 2 項分布, ポアソン分布, $\cdots$, x は整数
- 連続型 確率密度関数 正規分布, χ^2 分布,$\cdots$, x は実数

今日と次回の対象=質的変数
その中でも, 名義変数=カテゴリ (カル) 変数
順序や距離がなくぜんぶが対等. 例: 血液型, 性別, 携帯電話番号, チーム A 型, B 型などがカテゴリ

2 カテゴリなら, 0,1 のように番号を振って離散型と思える
3 カテゴリ以上なら, 順序や間隔によるので離散型には帰着できない.

なぜなら $\boxed{}$

質的変数が 1 つのときの適合度

母分布

カテゴリの個数 $k = 4$.

カテゴリ	O 型	A 型	AB 型	B 型
確率 f_i	$f_1 = 0.12$	$f_2 = 0.51$	$f_3 = 0.17$	$f_4 = 0.20$

$$\sum_{i=1}^{C} f_i = 1.$$

標本

出席番号	血液型
1	B 型
2	O 型
⋮	⋮
12	A 型

$\rightarrow$

度数分布表

カテゴリ	O 型	A 型	AB 型	B 型
度数 n_i	$n_1 = 2$	$n_2 = 3$	$n_3 = 6$	$n_4 = 1$

$$\sum^{C} n_i = N = 12.$$

適合度を表す量

期待度数=母分布の確率 × 標本サイズ

ピアソンの適合度基準 χ^2

カテゴリ k 個, 母分布の確率 $f_i (i = 1, \ldots, C)$, 標本の度数 n_i, 標本サイズ N, のとき,

$$\chi^2 = \frac{(\text{度数} - \text{期待度数})^2}{\text{期待度数}} \text{の合計}$$

$$= \sum_{i=1}^{C} \frac{(n_i - N f_i)^2}{N f_i}$$

が小さいほど, 標本は母分布に ‘よくあてはまっている’.

L03-Q3

Quiz(ピアソンの χ^2 と適合度の検定)

日本人の高校生からサイズ 24 の標本を抽出して血液型で分類したところ, 度数 (人数) は下の表のようになった.

A	AB	B	O
8	2	6	8

ある人の理論によれば, 日本人の血液型分布は
A:AB:B:O=$\frac{6}{12} : \frac{1}{12} : \frac{3}{12} : \frac{2}{12}$ であるという.

1. 母分布と, 標本からピアソンの適合度基準 χ^2 を求めよう.
2. この標本が母分布にしたがっているかどうか, 有意水準 $\alpha = 0.05$ で, 適合度のカイ二乗検定を行って判定しよう.

ここまで来たよ

1. 確率変数の独立性・ベイズの公式
   - ベイズ推定・ベイズの定理
2. 適合度の検定
   - カテゴリ変数とピアソンの適合度基準 χ^2
   - 適合度の検定

なぜ統計的仮説検定?

心理学, 教育学, 社会科学などでは標本サイズが大きくできないことが多い. 標本サイズが小さくても Yes/No のいちおうの結論を出す, 科学業界で合意された方法が
検定 (test)=統計的仮説検定 (statistical hypothesis test)

真の母平均値は 55g と異なる, を $\boxed{\text{証明}}$ したい
しか〜し, ≠ の証明はやりにくい 54g である, ことが証明できれば十分だけど, 有限サイズの標本からはとうてい無理.

こういうときの常套手段は $\boxed{\phantom{\text{背理法}}}$. 否定の命題「55g である」を仮定して $\boxed{\text{矛盾}}$ を導く.

注意
以下, $\boxed{\text{証明}}$, $\boxed{\text{矛盾}}$ は, 証明みたいなもの, 矛盾みたいなもの (統計的な, $\alpha = 0.05$ の確率で間違っている), です. この回の授業のローカル用語.
α: 有意水準. どれだけの誤りを許すか. 大きいほど頼りない $\boxed{\text{証明}}$. ふつうは 0.01 or 0.05.

帰無仮説と対立仮説

- H_0:帰無仮説 (null hypothesis) = 背理法の仮定 = 「真の母平均値 μ は $\mu_0 = 55\text{g}$ に等しい」
- H_1:対立仮説 (alternative hypothesis) = 示したい命題 = 「真の母平均値 μ は $\mu_0 = 55\text{g}$ でない」

上のは両側検定.
対立仮説が H_1: $\mu > \mu_0$ という形の 片側検定 もある

確率統計☆演習 II

適合度の検定

χ^2 がどのくらい大きかったら，「あてはまってない」と言っていいの？ 仮説検定 確率統計☆演習 I(2015)L12

実は，N が大きいとき，χ^2 は，自由度 $k = C - 1$ のカイ二乗分布にしたがう．C はカテゴリ数． 確率統計☆演習 I(2015)L13

適合度の検定の手順

1. 「有意水準 $\alpha = \ldots$ で」，
2. 「適合度のカイ二乗検定を行う」
3. 「帰無仮説を，'標本は $\{f_i\}_{i=1,\ldots,C}$ の母分布の母集団から抽出された'='適合する' とする」
4. 「帰無仮説のもとで検定統計量 ピアソンの適合度基準 χ^2 は自由度 $C - 1$ のカイ二乗分布にしたがう．これを検定統計量として用いる」
5. 「標本に対して $\chi^2 = \ldots$ である」
6. 「χ^2 より極端な値になる確率 p は，カイ二乗分布表より，α 以上/未満なので帰無仮説を採択する/棄却する (=有意でない/有意である)」

L03-Q4

Quiz(ピアソンの χ^2 と適合度の検定)

ある商品のサイコロは, 1 から 6 までの目が, 確率 $\frac{1}{6}$ ででるとされている. これが本当か確かめるために, 実際に $N = 60$ 回投げて試してみた. 度数 (人数) は下の表のようになった.

目	1	2	3	4	5	6
度数	14	8	6	12	11	9

1. ピアソンの適合度基準 χ^2 を求めよう.
2. この標本が, 想定される母分布に適合するかどうか, 有意水準 $\alpha = 0.05$ で, 適合度のカイ二乗検定を行って判定しよう.

お知らせ

- 次回こそ 1-542 実習室かも.
- 確率統計☆演習 I と同じセッティングで予習問題をやりましょう.
  http://hig3.net → RaMMoodle
  https://el.math.ryukoku.ac.jp/moodle/ → 確率統計☆演習 II(2016)
- チューター/Math ラウンジ 月火水木昼 1-614

https://manaba.ryukoku.ac.jp
マイページの下の方に
manaba 出席カード提出

カイ二乗分布表

有意水準 α, 自由度 k に対して, $\alpha = P(Y > \chi^2_\alpha(k))$ となる $\chi^2_\alpha(k)$ の値の表.

$k \backslash \alpha$	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.00003927	0.0001571	0.0009821	0.003932	0.01579	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.01003	0.02010	0.05064	0.1026	0.2107	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60
3	0.07172	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.064	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.145	1.610	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.6757	0.8721	1.237	1.635	2.204	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.9893	1.239	1.690	2.167	2.833	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.844	7.633	8.907	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.434	8.260	9.591	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2