# モーメント母関数

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 II L05(2016-05-19 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2016-05-19 Thu 07:35 JST hig"

今日の目標

- 離散型確率変数, 連続型確率変数に対してモーメント母関数が計算できる
- モーメント母関数から母期待値, 母分散が計算できる

http://hig3.net

## L04-Q1

## Quiz 解答:ピアソンの $\chi^2$ と独立性の検定

1. 期待度数は

| | 右利き | 右利きでない | 計 |
|---|---|---|---|
| 早生まれ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | 2 |
| 早生まれでない | $\frac{8}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | 4 |
| 計 | 4 | 2 | 6 |

$$\chi^2 = \frac{(1-\frac{4}{3})^2}{\frac{4}{3}} + \frac{(1-\frac{2}{3})^2}{\frac{2}{3}} + \frac{(3-\frac{8}{3})^2}{\frac{8}{3}} + \frac{(1-\frac{4}{3})^2}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{8}.$$

2. 自由度は $k = (r-1) \times (c-1) = 1$. 有意水準 $\alpha = 0.05$ で, $\chi_\alpha(k) = 3.841 > \frac{3}{8}$. よって, 独立であるという帰無仮説は棄却できない. 早生まれと右利きであることには関係があるとは言えない.

# ここまで来たよ

3. 独立性の検定・ピボットテーブル

4. モーメント母関数
    - モーメント母関数の定義
    - モーメント母関数と母期待値, 母分散
    - モーメント母関数と変数変換・確率変数の和

## (定義) モーメント母関数 moment generating function

離散型または連続型確率変数 $X$ に対して,

$$M_X(t) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{tX}]$$

を $X$ のモーメント母関数という.

$M_X(t)$ は大文字だが, 確率変数ではなく, ただの $t$ の 1 変数関数. $X$ の確率分布から決まる. 積率母関数ともいう.

## モーメント母関数の性質

$$M_X(t) = \mathrm{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k X^k}{k!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathrm{E}[X^k], \quad M_X(0) = 1.$$

母期待値 $\mathrm{E}[X^k]$: $X$ の $k$ 次のモーメント, 積率

# 例 (離散) I

L05-Q1

## Quiz(モーメント母関数 (離散型確率変数))

離散型確率変数 $X$ は次に従う.

$$P(X=x)=\begin{cases} +\frac{1}{3} & (x=+1) \\ +\frac{2}{3} & (x=-1) \\ 0 & (x=\dots,-3,-2,0,2,3,\dots) \end{cases}$$

$X$ のモーメント母関数 $M_X(t)$ を求めよう.

# 例 (離散) I

L05-Q2

## Quiz(モーメント母関数 (幾何分布))

離散型確率変数 $X$ は次の確率に従う.

$$P(X=x)=\begin{cases} p\cdot(1-p)^{x-1} & (x=1,2,3,4,\dots) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

ただし, $0<p<1$ は定数.
$X$ のモーメント母関数 $M_X(t)$ を求めよう.

# 連続型確率変数の母期待値 (復習)

## 母期待値の定義

離散型確率変数　$\mathrm{E}[\phi(X)] = \sum_{x} f(x) \cdot \phi(x)$　$f(x)$:確率関数, 確率分布

連続型確率変数　$\mathrm{E}[\phi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \phi(x)\, \mathrm{d}x$　$f(x)$:確率密度関数

確率統計☆演習 I(2015)L07

# 例 (連続) I

L05-Q3

## Quiz(モーメント母関数 (指数分布))

連続型確率変数 $X$ は次の確率密度関数を持つ.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ a \cdot \mathrm{e}^{-ax} & (x \geq 0) \end{cases}$$

ただし, $a > 0$ は定数.

1. $X$ のモーメント母関数 $M_X(t)$ を求めよう. $t < a$ としてよい.
2. $X$ の $k$ 次のモーメント $\mathrm{E}[X^k]$ を求めよう.
3. $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.

# 例 (連続) I

L05-Q4

## Quiz(モーメント母関数 (一様分布))

連続型確率変数 $X$ は次の確率密度関数を持つ.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & (a \leq x < b) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$X$ のモーメント母関数 $M_X(t)$ を求めよう.

# ここまで来たよ

3 独立性の検定・ピボットテーブル

4 モーメント母関数
- モーメント母関数の定義
- モーメント母関数と母期待値, 母分散
- モーメント母関数と変数変換・確率変数の和

## (定理) モーメント母関数と母平均値, 母分散, モーメントの関係

$$\frac{\mathrm{d}^k M_X}{\mathrm{d}t^k}(0) = \mathrm{E}[X^k]$$

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathrm{E}[X^k]$$

なので,

# L05-Q5

## Quiz(モーメント母関数)

連続型確率変数 $X$ は次のモーメント母関数を持つ.

$$M_X(t) = \frac{1}{1-2t}$$

1. $\mathrm{E}[X^1]$ を求めよう.
2. $\mathrm{E}[X^2]$ を求めよう.

## ここまで来たよ

3 独立性の検定・ピボットテーブル

4 モーメント母関数
- モーメント母関数の定義
- モーメント母関数と母期待値，母分散
- モーメント母関数と変数変換・確率変数の和

# モーメント母関数と変数変換

たとえば, $Z = aX + b$ なら,

$$M_Z(t) = M_{aX+b}(t) = \mathrm{e}^{tb} M_X(at).$$

なぜなら

$\mathrm{E}[aX + b] =$

$\mathrm{E}[(aX + b)^2] =$

## (定理) 独立な確率変数のモーメント母関数

$X, Y$ が独立のとき,

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$$

なぜなら,

# お知らせ

- 2016-05-26 木 6 統計検定勉強会 2-220 受験する人もしない人もどうぞ
- 2016-06-09 木 プチテスト 外部記憶ペーパーなし
- 確率統計及び演習 I の外部記憶ペーパーをまとめに使えば?
  `https://register.math.ryukoku.ac.jp/archive/`
- 確率統計☆演習 I と同じセッティングで予習問題をやりましょう.
  `http://hig3.net` → RaMMoodle
  `https://el.math.ryukoku.ac.jp/moodle/` → 確率統計☆演習 II(2016)
- チューター/Math ラウンジ 月火水木昼 1-614

`https://manaba.ryukoku.ac.jp`
マイページの下の方に
manaba 出席カード提出