確率変数の和と中心極限定理

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 II L06(2016-05-26 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2016-05-27 Fri 06:49 JST hig"

今日の目標

- 確率変数の和の確率を定義から計算できる
- 確率変数の和の確率分布をモーメント母関数で求められる
- 独立同分布に従う確率変数の多数個の和の確率分布を中心極限定理から求められる

http://hig3.net

L05-Q1

Quiz 解答:モーメント母関数 (離散型確率変数)

$$M_X(t) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^t + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t}$$

L05-Q2

Quiz 解答:モーメント母関数 (幾何分布)

$$\sum_{x=1}^{\infty} p(1-p)^{x-1}\mathrm{e}^{tx} = \frac{p\mathrm{e}^t}{1-(1-p)\mathrm{e}^t}$$

L05-Q3

Quiz 解答:モーメント母関数 (指数分布)

1. $M_X(t) = \frac{1}{1-\frac{t}{a}}$.
2. 等比級数の和の公式と思って, $\mathrm{E}[X^k] = k!a^{-k}$.

3. $M_X(0)'' - M_x'(0)^2 = (2 - 1 \cdot 1)a^{-2} = a^{-2}$.

L05-Q4

Quiz 解答:モーメント母関数 (一様分布)

$$M_X(t) = \int_a^b \frac{1}{b-a} \mathrm{e}^{tx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\frac{\mathrm{e}^{bt} - \mathrm{e}^{at}}{b-a}.$$

$\lim_{t\to 0} M_X(t) = 1$ であることが確かめられる.

L05-Q5

Quiz 解答:モーメント母関数

1. $\mathrm{E}[X] = M_X'(0) = 2$.
2. $\mathrm{E}[X^2] = M_X''(0) = 8$.

別解 $M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(2t)^k$ より.

ここまで来たよ

3. モーメント母関数

4. 確率変数の和と中心極限定理
   - 確率変数の和
   - 正規分布
   - 中心極限定理

確率変数の和 I

確率変数 X, Y を考える. 和 $Z = X + Y$ も確率変数.

離散型の例

$y \setminus x$	2	4	6
1	6/20	0	2/20
3	3/20	4/20	5/20

$\rightarrow$

z	確率
3	
5	
7	
9	

$$P(Z = z) = \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[x+y=z]}(X, Y)] = \boxed{}$$

連続型の確率密度関数の例

$$f_{\mathrm{Z}}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{XY}}(x, z - x)\, \mathrm{d}x.$$

独立な確率変数の和

復習 独立とは限らない確率変数 X, Y の性質

- $\mathrm{E}[X+Y] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y], \mathrm{E}[\phi_1(X) + \phi_2(Y)] = \mathrm{E}[\phi_1(X)] + \mathrm{E}[\phi_2(Y)]$.

復習 独立な確率変数 X, Y の性質

確率統計☆演習 I(2015)L9 確率統計☆演習 II(2015)L2

- $P(X=x, Y=y) = P(X=x) \times P(Y=y), f_{\mathrm{XY}}(x,y) = f_{\mathrm{X}}(x) \times f_{\mathrm{Y}}(y)$.
- $\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X] \times \mathrm{E}[Y]$, $\mathrm{E}[\phi_1(X) \times \phi_2(Y)] = \mathrm{E}[\phi_1(X)] \times \mathrm{E}[\phi_2(Y)]$.
- $\mathrm{V}[X+Y] = \mathrm{V}[X] + \mathrm{V}[Y]$.

$\to$ 確率変数の和の確率

- 離散のとき $P(Z=z) = \sum_x P(X=x)P(Y=z-x)$.
- 連続のとき $f_{\mathrm{Z}}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{X}}(x) f_{\mathrm{Y}}(z-x)\,\mathrm{d}x$.

L06-Q1

Quiz(確率変数の和)

独立な確率変数 X, Y は下の確率に従う.

$$P(X=x) = \begin{cases} 3/6 & (x=1) \\ 1/6 & (x=2) \\ 2/6 & (x=3) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}, \quad P(Y=y) = \begin{cases} 6/10 & (y=5) \\ 3/10 & (y=6) \\ 1/10 & (y=7) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

確率変数 $Z = X + Y$ の従う確率を求めよう.

独立な確率変数のモーメント母関数

X, Y が独立のとき，$Z = X + Y$ のモーメント母関数は

$$M_{\mathrm{Z}}(t) = M_{\mathrm{X+Y}}(t) = M_{\mathrm{X}}(t) \times M_{\mathrm{Y}}(t)$$

なぜなら，

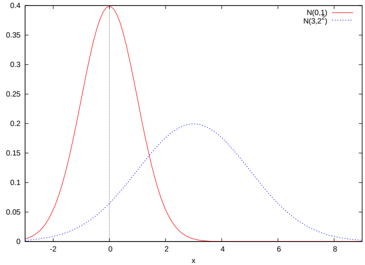
ここまで来たよ

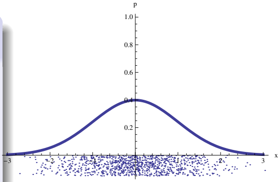
一般の正規分布

標準正規分布の確率密度関数

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}$$

$X = aZ + b$ を考える.
母平均値 $\mu = \mathrm{E}[X] = b$,
母分散 $\sigma^2 = \mathrm{V}[X] = a^2 \mathrm{V}[Z] = a^2$.
確率密度関数は, z のところに $z = \frac{x-b}{a} = \frac{x-\mu}{\sigma}$ を代入すればいいので,





正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

母平均値 μ, 母分散 σ^2.

確率統計☆演習 I(2015)L08

正規分布のモーメント母関数 I

L06-Q2

Quiz(モーメント母関数 (正規分布))

連続型確率変数 X は次の確率密度関数を持つ.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

X のモーメント母関数 $M_X(t)$ を求めよう.

L06-Q3

Quiz(確率変数の和)

X, Y は独立な確率変数であり X は母平均値 $\mu_1 = 0$, 母分散 $\sigma_1^2 = 1^2$ の正規分布, Y は母平均値 $\mu_2 = 3$, 母分散 $\sigma_2^2 = 2^2$ の正規分布に従う.
$Z = X + Y$ の確率密度関数 $f_Z(z)$ を求めよう.

モーメント母関数が同じなら, (一定の条件下で) 確率変数として同じ.
「確率変数の性質は, モーメント母関数だけで決まる」

認めてくれ〜

正規分布に従う確率変数の和と差

正規分布に従う確率変数
$X \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$
$Y \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$
の和差 $Z_\pm = X \pm Y$ は,
$Z_\pm \sim N(\mu_1 \pm \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ に従う.

確率変数 (族) が再生的

同じ確率分布に従う確率変数 X, Y(ただし パラメタ μ_1, μ_2 は別々でよい) の和 $Z = X + Y$ もまた同じ確率分布 (ただしパラメタはまた別でもよい) に従うとき, この確率分布は再生的であるという.

ここまで来たよ

中心極限定理 (厳密バージョン)

確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が, 母平均値 μ, 母分散 σ^2 の独立同分布に従うとする. 正規分布と限らない. どんな分布でも可

$V_n = \dfrac{\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)-\mu}{\sigma} \times \sqrt{n}$ とすると,

V_n は, $n \to +\infty$ の極限で, $\mathrm{N}(0, 1^2)$ に従う. すなわち

$$\lim_{n\to+\infty} P(a \leq V_n < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\, \mathrm{d}x$$

V_n は $\mathrm{N}(0, 1^2)$ にしたがう Z に法則収束する.

確率統計☆演習 I(2015)L9

証明.

$\mathrm{E}[V_n] = 0, \mathrm{V}[V_n] = 1$ はすぐわかる.

L06-Q4

Quiz(中心極限定理)

確率変数 $X_1, \ldots, X_{10}$ は確率密度関数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (0 \leq x < 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

の独立同分布に従う．ここで，f から $\mathrm{E}[X_i] = 1, \mathrm{V}[X_i] = \frac{1}{3}$ と求められる．$n = 10$ が大きいと思うと，次はそれぞれ，近似的にどのような分布に従うか，‘母平均値が $\boxed{}$，母分散が $\boxed{}$ の $\boxed{}$ 分布’ のように答えよう．

1. 確率変数 $T = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{10}$
2. 確率変数 $U = \frac{1}{10}(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{10})$

お知らせ

- 2016-05-26 木 6 統計検定勉強会 2-220 受験する人もしない人もどうぞ
- 確率統計☆演習 I と同じセッティングで予習問題をやりましょう．
  http://hig3.net → RaMMoodle
  https://el.math.ryukoku.ac.jp/moodle/ → 確率統計☆演習 II(2016)
- チューター/Math ラウンジ 月火水木昼 1-614

https://manaba.ryukoku.ac.jp
マイページの下の方に
manaba 出席カード提出

プチテストやります!

2016-06-09 木 2, **外部記憶ペーパー A4 両面 1 枚使用可 (計算科学☆実習 B と方式は異なるかも)**. , 30 ピーナッツ.
出題計画 2016-06-02 木に確定します.
去年の問題は参考程度に. 非参照 Quiz ができるようになっておくことをおすすめします. p
確率統計及び演習 I の外部記憶ペーパーをまとめに使えば?
`https://register.math.ryukoku.ac.jp/archive/`
必要な数表は問題とともに配布します.

- 2 変数の確率で, 周辺分布, 同時分布, 条件付き確率のどれかからどれかを求める × 何問か (L01,L02, 非参照 Quiz L02,L03)
- 独立な確率変数の性質 (L02,L06, 非参照 Quiz L03)
- ベイズの定理で条件付き確率から条件付き確率を求める (L02, 非参照 Quiz L03)
- ベイズ推定する (L03, 非参照 Quiz L04)
- 適合度のカイ二乗検定を行う (L03, 非参照 Quiz L04)
- 独立性のカイ二乗検定を行う (L04, 非参照 Quiz L05)
- 確率分布からモーメント母関数を求める (L05, 非参照 Quiz L06)
- モーメント母関数からモーメントを求める (L05, 非参照 Quiz L06)
- 確率変数の和の確率分布を求める (L06)
- 中心極限定理を利用して…(L07)
- 正規分布の…(L07)