カイ二乗分布と t 分布

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 II　L07(2016-06-02 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2016-06-02 Thu 13:34 JST hig"

今日の目標

- カイ二乗分布の定義を説明できる．数表から確率が求められる．
- モーメント母関数からカイ二乗分布の性質を導ける
- t 分布の定義を説明できる．数表から確率が求め

http://hig3.net

L06-Q1

Quiz 解答:確率変数の和

$$P(Z=z)=\begin{cases}\frac{3}{6}\cdot\frac{6}{10} & (z=6)\\ \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{10} & (z=7)\\ \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{10}+\frac{2}{6}\cdot\frac{6}{10} & (z=8)\\ \text{略} & (z=9)\\ \text{略} & (z=10)\\ 0 & (\text{他})\end{cases}$$

独立なので $M_{\mathrm{Z}}(t)=M_{\mathrm{X}}(t)M_{\mathrm{Y}}(t)$ を使って e^{zt} の係数 $P(Z=z)$ を求める作戦もある.

L06-Q2

Quiz 解答:モーメント母関数 (正規分布)

$$M_{\mathrm{X}}(t)=\mathrm{e}^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$$

L06-Q3
Quiz 解答:確率変数の和

$$f_{\mathrm{Z}}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(z-x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \,\mathrm{d}x = \cdots$$

とやってもいつかは計算できる．楽な方法としてはモーメント母関数を考え,

$$M_{\mathrm{Z}}(t) = M_{\mathrm{X}}(t)M_{\mathrm{Y}}(t) = \mathrm{e}^{\mu_1 t}\mathrm{e}^{\frac{t^2\sigma_1^2}{2}}\mathrm{e}^{\mu_2 t}\mathrm{e}^{\frac{t^2\sigma_2^2}{2}} = \mathrm{e}^{(\mu_1+\mu_2)t}\mathrm{e}^{\frac{t^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{2}}.$$

よって, 母平均値 $\mu_1 + \mu_2$, 母分散 $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ の正規分布.

L06-Q4
Quiz 解答:中心極限定理 T は母平均値が 10, 分散が $\frac{10}{3}$ の正規分布 $\mathrm{N}(10, \frac{10}{3})$ に従う.
U は母平均値が 1, 分散が $\frac{1}{30}$ の正規分布 $\mathrm{N}(1, \frac{1}{30})$ に従う.

ここまで来たよ

カイ二乗分布

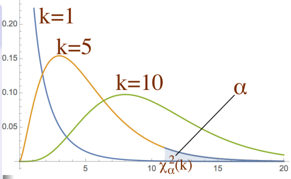
確率統計☆演習 I(2015)L13

カイ二乗分布

$Z_1, \ldots, Z_k$: 標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ に従う独立な確率変数とするとき，
確率変数 $Y = Z_1^2 + \cdots + Z_k^2$ とおく．
Y のしたがう分布を 自由度 k のカイ二乗分布 $\chi^2(k)$ という．

$\chi^2(k)$ の確率密度関数

$$f_k(y) = \begin{cases} C_k \times y^{\frac{k}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y} & (y \geq 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$



$$\frac{1}{C_k} = \int_0^\infty y^{\frac{k}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y}\, \mathrm{d}y = (\tfrac{k}{2})!\, 2^{\frac{k}{2}}.$$

カイ二乗分布のモーメント母関数と母期待値

Y が自由度 k のカイ二乗分布にしたがうとき,

$$M_Y(t) = (1-2t)^{-\frac{k}{2}}$$

$$\mathrm{E}[Y_k] = \boxed{}, \qquad \mathrm{V}[Y_k] = \boxed{}$$

中心極限定理より $\chi^2(k) \to \mathrm{N}(k, 2k) \quad (k \to +\infty)$

確率密度関数

$$f_k(y) = \begin{cases} C_k \times y^{\frac{k}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y} & (y \geq 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

からモーメント母関数を計算しても同じ結果になるので，この確率密度関数であってる．

カイ二乗分布の再生性

$Y_1 \sim \chi^2(k_1), Y_2 \sim \chi^2(k_2)$ のとき，$Y_1 + Y_2 \sim \chi^2(k_1 + k_2)$.

なぜなら，
理由 1.
理由 2.

L07-Q1

Quiz(カイ二乗分布)

自由度 $2, 3$ のカイ二乗分布にしたがう独立な確率変数
$Y_1 \sim \chi(2)$,$Y_2 \sim \chi(3)$ を考える.

1. $\mathrm{V}[Y_1 + Y_2]$ を求めよう.
2. $\mathrm{E}[4Y_1 + 5Y_2]$,$\mathrm{E}[Y_1 Y_2]$ を求めよう.
3. $P(Y_1 + Y_2 > a) = 0.05$ となる a の値を求めよう.

L07-Q2

Quiz(正規分布の再生性)

正規分布に従う独立な確率変数 $X_1 \sim \mathrm{N}(1, 2^2)$, $X_2 \sim \mathrm{N}(3, 4^2)$ を考える.

1. $\mathrm{E}[2X_1 - 3X_2 + 1]$ を求めよう.
2. $\mathrm{V}[2X_1 - 3X_2 + 1]$ を求めよう.
3. $Y = 2X_1 - 3X_2 + 1$ はどのような分布に従うか
4. $P(2X_1 - 3X_2 + 1 < -8)$ を求めよう.

復習:正規分布の不偏標本分散のしたがう分布

確率統計☆演習 I(2015)L13

不偏標本分散のしたがう分布

確率変数 X が正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ に従うとする．サイズ n の標本の不偏標本分散

$$S^2 = \frac{1}{n-1}((X_1 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_n - \overline{X})^2)$$

を考えたとき，

$$Y = (n-1) \times \frac{S^2}{\sigma^2}$$

は自由度 $k = n - 1$ の カイ二乗分布 $\chi^2(n-1)$ に従う．

$Y \sim \chi^2(k)$ のとき，$\frac{Y}{k}(\simeq 1)$ が，分散の比と同じ分布．

証明じゃないけど説明

独立な $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ $(i = 1, \ldots, n)$ に対して,

$$n \times \frac{1}{n}\left[\left(\frac{X_1 - \mu}{\sigma}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_n - \mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

は自由度 n のカイ二乗分布 $\chi^2(n)$ にしたがう.
不偏標本分散 S^2 に対して,

$$(n-1) \times \frac{S^2}{\sigma^2} = (n-1) \times \frac{1}{n-1}\left[\left(\frac{X_1 - \overline{X}}{\sigma}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_n - \overline{X}}{\sigma}\right)^2\right]$$

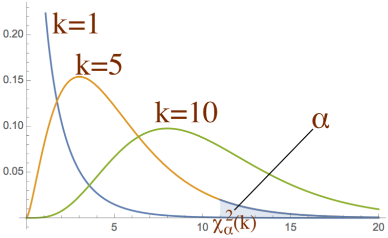
は自由度は $n-1$ のカイ二乗分布 $\chi^2(n-1)$ にしたがう.
$-\mu$ でなく $-\overline{X}$ であるため自由度 $n-1$.

復習:正規分布の母分散の区間推定

確率統計☆演習 I(2015)L13

$\chi^2_\alpha(k)$ の定義

$\alpha = P(\chi^2 > \chi^2_\alpha(k))$.
$\chi^2_\alpha \times (k)$ でないので大注意.



$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < (n-1)\times\frac{S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1-\alpha.$$

正規分布の母分散の信頼区間

正規分布の標本の不偏標本分散が S^2 のとき, 信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は

$$\frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\times S^2 < \sigma^2 < \frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\times S^2$$

L07-Q3

Quiz(母分散の区間推定)

あるファーストフードチェーンのポテトフライ S の重さは正規分布に従うという.
お店で 9 個のポテトフライ S サイズを買って重さを量り, サイズ 9 の標本とした. このとき
標本平均値は $80\mathrm{g}$, 不偏標本分散は $72\mathrm{g}^2$ だった.
母分散を信頼係数 $1-\alpha=0.95$ で区間推定しよう.

確率統計☆演習 I(2015)L13

ここまで来たよ

3 確率変数の和と中心極限定理

4 カイ二乗分布と t 分布
- カイ二乗分布
- t 分布

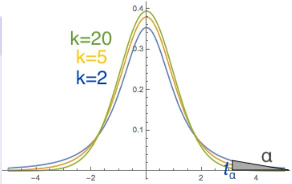
t 分布

t 分布

確率変数 Y と Z が独立で, $Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$, $Y \sim \chi^2(k)$ のとき, 連続型確率変数 $T = \dfrac{Z}{\sqrt{Y/k}}$ のしたがう分布を自由度 k の (スチューデントの, またはゴセットの)t 分布という.

t 分布の確率密度関数

$$f_k(x) = \frac{1}{C_k} \cdot \left(1 + \frac{1}{k}x^2\right)^{-\frac{k+1}{2}}.$$



$k \to +\infty$ で $T \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$.
なぜなら, Y/k がほぼ定数値 k/k をとるようになるから.

t 分布 ($k=1$) には，母平均値，母分散がない!

母平均値がない (定義されない or 発散する) 確率変数というのは実はよくある．

例: $f(x) = \begin{cases} x^{-2} & (x \geq 1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$

k 次のモーメントがない t 分布にはモーメント母関数が「ない」
これまで説明したいくつかの定理には「母平均値, 母分散があるとき」という仮定を加えないといけない.

L07-Q4

Quiz(t 分布)

標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ にしたがう確率変数 $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots,$ 自由度 3 のカイ二乗分布にしたがう Y を考える．これらは独立であるとする．を考える．

1. $P(Z_1 > a\sqrt{Y})) = 0.01$ となる a の値を求めよう．
2. $P(Z_1^2 > b \times (Z_2^2 + Z_3^2)) = 0.05$ となる b の値を求めよう．

復習:正規分布の標本平均値の分布 (母分散未知)

不偏標本分散で正規化した標本平均値の分布

X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を母平均値 μ, 母分散 σ^2 の独立同分布にしたがう確率変数とする (すなわち, ある分布からとるサイズ n の標本とする).

$$\text{標本平均値}\overline{X} = \frac{1}{n}[X_1 + \cdots + X_n],$$
$$\text{標本分散 } S^2 = \frac{1}{n-1}[(X_1 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_n - \overline{X})^2]$$

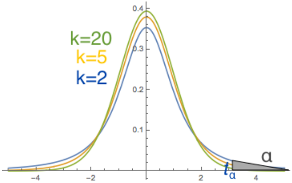
から作った量

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} \left(= \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\frac{1}{n-1}}} = \frac{Z}{\sqrt{Y\frac{1}{n-1}}} \right)$$

は, 自由度 $n-1$ の t 分布にしたがう.

なぜなら, 最右辺で分子 $Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$, 分母の $Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ は自由度 $n-1$ のカイ二乗分布にしたがうから. 確率統計☆演習 I(2015)L11

復習:母分散未知の正規分布の母平均値の区間推定



$$P\left(-t_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\overline{X}^{(n)} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} < +t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1 - \alpha.$$

正規分布の母平均値の信頼区間

正規分布のサイズ n の標本を考える. 標本平均値 $\overline{X}_{(n)}$, 不偏標本分散 S^2 のとき, 母平均値 μ の信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は

$$\overline{X}_{(n)} - t_{\alpha/2}(n-1) \times \sqrt{S^2/n} < \mu < \overline{X}_{(n)} + t_{\alpha/2}(n-1) \times \sqrt{S^2/n}$$

確率統計☆演習 I(2015)L11

母平均値の区間推定 I

L07-Q5

Quiz(母平均値の区間推定 (母分散未知))

あるドーナツ製造マシンが次々に製造するドーナツの重さ Xg は, 独立同分布にしたがう確率変数である
製造された 4 個のドーナツの重さを測定したところ, 次のようだった.
$51\mathrm{g}, 52\mathrm{g}, 47\mathrm{g}, 50\mathrm{g}.$

1. 母平均値 $\mu = \mathrm{E}[X]$ を, 信頼係数 $1 - \alpha = 0.95$ で区間推定しよう.
2. 母平均値 $\mu = \mathrm{E}[X]$ を, 信頼係数 $1 - \alpha = 0.99$ で区間推定しよう.

確率統計☆演習 I(2015)L11

プチテストやります!

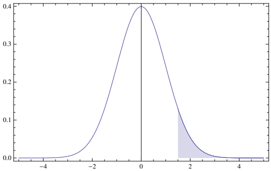
2016-06-09 木 2, **外部記憶ペーパー A4 両面 1 枚使用可．決まった用紙に事前に手書きで作成 (計算科学☆実習 B と方式は異なります)．コピーや印刷禁止．**, 30 ピーナッツ．
用紙は `https://register.math.ryukoku.ac.jp/archive` から取得して印刷．
必要な数表は配布します．電卓使用不可．正規分布とカイ二乗分布のモーメント母関数は導かずに使っていいですが, 問題文にはモーメント母関数は書かないので, 必要なら外部記憶ペーパーに書いておいてください．
出題計画 2016-06-02 木に確定しました．去年の問題は参考程度に．非参照 Quiz ができるようになっておくことをおすすめします．
確率統計及び演習 I の外部記憶ペーパーをまとめに使えば?
`https://register.math.ryukoku.ac.jp/archive/`
必要な数表は問題とともに配布します．

- 2 変数の確率で, 周辺分布, 同時分布, 条件付き確率のどれかからどれかを求める $\times$ 何問か (L01,L02, 非参照 Quiz L02,L03)
- ベイズの定理で条件付き確率から条件付き確率を求める (L02, 非参照 Quiz L03)
- 独立性のカイ二乗検定を行う (L04, 非参照 Quiz L05)
- 確率分布からモーメント母関数を求める (L05, 非参照 Quiz L06)
- モーメント母関数からモーメントを求める (L05, 非参照 Quiz L06)
- 確率変数の和の確率分布を求める (L06, 非参照 Quiz L07)
- 独立確率変数の和や定数倍の母平均値, 母分散, 確率分布, 確率を求める．中心極限定理も使うかも (L06, 非参照 Quiz L07)
- 正規分布に従う確率変数 (の和や定数倍) の母平均値や母分散や分布や確率を求める (L07, 予習問題 g のみ)
- カイ二乗分布に従う確率変数 (の和や定数倍) の母平均値や母分散や分布や確率を求める (L07, 予習問題のみ)
- t 分布に従う確率変数の確率を求める (L07, 予習問題のみ)

標準正規確率表 (上側確率=$Q(z) = 1 - F(z)$)

z に対する $Q(z) = P(Z > z) = 1 - F(z)$ の値の表.

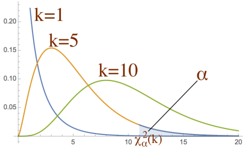
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010



カイ二乗分布表

有意水準 α, 自由度 k に対して, $\alpha = P(Y > \chi^2_\alpha(k))$ となる $\chi^2_\alpha(k)$ の値の表.

$k\backslash\alpha$	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.00003927	0.0001571	0.0009821	0.003932	0.01579	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.01003	0.02010	0.05064	0.1026	0.2107	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60
3	0.07172	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.064	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.145	1.610	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.6757	0.8721	1.237	1.635	2.204	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.9893	1.239	1.690	2.167	2.833	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.844	7.633	8.907	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.434	8.260	9.591	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2



t 分布表

有意水準 α, 自由度 k に対して, $\alpha = P(T > t_\alpha(k))$ となる $t_\alpha(k)$ の値の表.

$k\backslash\alpha$	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.00025
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	0.816	1.080	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
$+\infty$	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291