2 標本の平均値の差の区間推定と検定

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 II L08(2016-06-16 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2016-06-16 Thu 09:54 JST hig"

今日の目標

- 2 つの正規分布の母平均値の差を区間推定できる
- 2 標本 t 検定ができる
- t 検定,2 標本 t 検定, カイ二乗検定について両側・片側検定ができる

http://hig3.net

L08-Q1

Quiz 解答:カイ二乗分布

カイ二乗分布の再生性より, $Y = Y_1 + Y_2$ は自由度 5 のカイ二乗分布にしたがう.

1. モーメント母関数から求めると, $\mathrm{V}[Y] = 2 \cdot 5$.
2. $\mathrm{E}[4Y_1 + 5Y_2] = 4\mathrm{E}[Y_1] + 5[Y_2]$. モーメント母関数より, $4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 23$.
   独立性より, $\mathrm{E}[Y_1 Y_2] = \mathrm{E}[Y_1][Y_2] = 2 \cdot 3$.
3. $P(Y > a) = 0.05$. カイ二乗分布表の $k = 5$ の行を見て, $a = 11.07$.

L08-Q2

Quiz 解答:正規分布の再生性

1. $\mathrm{E}[2X_1 - 3X_2] = 2\mathrm{E}[X_1] - 3\mathrm{E}[X_2] + 1 = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 + 1 = -6$.
2. 独立性より $\mathrm{V}[2X_1 - 3X_2 + 1] = \mathrm{V}[2X_1] + \mathrm{V}[-3X_2] = 2^2\mathrm{V}[X_1] + (-3)^2\mathrm{V}[X_2] = 2^2 \cdot 2^2 + 3^2 \cdot 4^2$.

3. 正規分布の再生性より, また, 正規分布を $+1$ だけ平行移動しても正規分布なので, 母平均値 -6, 母分散 160 の正規分布.
4. $Z = \frac{2X_1 - 3X_2 + 1 - (-6)}{\sqrt{160}} \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$.
   $P(2X_1 - 3X_2 + 1 < -8) = P(Z < \frac{-2}{\sqrt{160}}) = P(Z > 0.158)$. 正規分布表より, 0.4364.

L07-Q4

Quiz 解答:t 分布

1. $P(Z_1 > a\sqrt{Y}) = P(\sqrt{Z_1}\sqrt{Y/3} > \sqrt{3}a)$. $T = \sqrt{Z_1}\sqrt{Y/3}$ は自由度 3 の t 分布にしたがうので, $\sqrt{3}a = 4.541$. $a = 2.622$.
2. $P(Z_1^2 > b \times (Z_2^2 + Z_3^2)) = P(\left|\frac{Z_1}{\sqrt{(Z_2^2+Z_3^2)/2}}\right| > \sqrt{2b})$.
   $T = \frac{Z_1}{\sqrt{(Z_2^2+Z_3^2)/2}}$ は自由度 2 の t 分布に従うので, $\sqrt{2b} = 4.303$. よって, $b = 1.037$.

ここまで来たよ

3. カイ二乗分布と t 分布

4. 2 標本の平均値の差の区間推定と検定
   - 正規分布にしたがう確率変数の差
   - 2 標本 t 検定
   - 両側検定と片側検定

正規分布にしたがう確率変数の和と差

正規分布の再生性 確率統計☆演習 II(2016)L06

確率変数 $X \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ のとき,
和の確率変数 $Z = X + Y \sim \mathrm{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

さらに, $aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b\sigma_2^2)$ だったから,
差の確率変数 $X - Y \sim \mathrm{N}(\mu_1 - \mu_2, (+1)^2\sigma_1^2 + (-1)^2\sigma_2^2)$.

以下 $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$ である場合だけ考える.

標本平均値の差

確率変数 X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ が独立同分布 $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2)$
確率変数 Y_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ が独立同分布 $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)$
にしたがうとする (X, Y のサイズ n, m の標本). 標本平均値は, 再生性より,
$\overline{X} = \frac{1}{n}[X_1 + \cdots + X_n] \sim \mathrm{N}(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n})$.
$\overline{Y} = \frac{1}{m}[Y_1 + \cdots + Y_m] \sim \mathrm{N}(\mu_2, \frac{\sigma^2}{m})$.
よって, $\overline{X} - \overline{Y} \sim \mathrm{N}(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2 \cdot (\frac{1}{n} + \frac{1}{m}))$.
注: X_i, Y_i が正規分布とかぎらない独立同分布にしたがうときも, n, m が大きければ, 中心極限定理から近似的にこのことが成り立つ.
これを使って $\mu_1 - \mu_2$ について区間推定や検定ができる!

しか〜し, 母分散 σ^2 が最初からわかっていることはなかなかない.
母分散を推定値で代用する.

共通の母分散の推定値

2 標本の合併した (プールした) 不偏標本分散

標本 X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, 標本 Y_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

$$S^2 = \frac{1}{n+m-2}\left[(X_1 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_n - \overline{X})^2 + (Y_1 - \overline{Y})^2 + \cdots + (Y_m - \overline{Y})^2\right]$$

標本平均値の差のしたがう分布

$X_i \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2), Y_j \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ のとき，
2 標本 t 統計量

$$T = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S^2(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})}}$$

は自由度 $n + m - 2$ の t 分布にしたがう

母平均値の差の区間推定

$X_i \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2), Y_i \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ のとき，
母平均値の差 $\mu_1 - \mu_2$ の信頼係数 $1 - \alpha$ の信頼区間は

$$\overline{X} - \overline{Y} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n + m - 2)\sqrt{S^2(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})}$$
$$< \mu_1 - \mu_2 < \overline{X} - \overline{Y} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n + m - 2)\sqrt{S^2(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})}$$

L08-Q1

Quiz(母平均値の差の区間推定 (母分散未知))

ドーナツ製造マシン 1 号,2 号が製造するドーナツの重さ X, Yg は, 未知の母平均値 μ_1, μ_2 の独立同分布にしたがう確率変数である. 母分散も未知だが, 1 号と 2 号で等しいことがわかっている.
1 号,2 号で製造したドーナツの重さは次のようだった.
1 号: $51\text{g}, 52\text{g}, 47\text{g}, 50\text{g}.$
2 号: $55\text{g}, 56\text{g}, 51\text{g}, 52\text{g}, 56\text{g}, 54\text{g}.$

1. $\overline{X}, \overline{Y}$, 合併した不偏標本分散 S^2 を求めよう.
2. 母平均値の差 $\mu_1 - \mu_2$ を, 信頼係数 $1 - \alpha = 0.99$ で区間推定しよう.

ここまで来たよ

3 カイ二乗分布と t 分布

4 2 標本の平均値の差の区間推定と検定
- 正規分布にしたがう確率変数の差
- 2 標本 t 検定
- 両側検定と片側検定

復習:統計的仮説検定 確率統計☆演習 I(2015)L12

点推定 μ は値 xxx と推定する
区間推定 μ は値 xxx と値 yyy の間と推定する (信頼係数 $1-\alpha$ で)
検定 μ は値 xxx と $\boxed{}$ する (有意水準 α で) or あるかどうかわからないと言う

あるドーナツ製造器は, 重さ X(確率変数) の母平均値が 55g であるように調整済みだという. しかし, 5 個買ってみたら, みんな軽めな感じ. これ, 本当に母平均値 55 g なの?(っていうか 55 g でないと言いたい).

- H_0:帰無仮説 (null hypothesis) = 背理法の仮定 = 「真の母平均値 μ は $\mu_0 = 55\text{g}$ に等しい」
- H_1:対立仮説 (alternative hypothesis) = 示したい命題 = 「真の母平均値 μ は $\mu_0 = 55\text{g}$ でない」

(両側)2 標本 t 検定 I

L08-Q2

Quiz(両側 2 標本 t 検定)

ドーナツ製造マシン 1 号,2 号が製造するドーナツの重さ X_i, Y_jg は, 未知の母平均値 μ_1, μ_2 の独立同分布にしたがう確率変数である. 母分散も未知だが, 1 号と 2 号で等しいことがわかっている.

- 1 号で製造したドーナツの標本は, サイズ 4, 標本平均値 $50\mathrm{g}$, 不偏標本分散 $\frac{14}{3}\mathrm{g}^2$,
- 2 号で製造したドーナツの標本は, サイズ 6, 標本平均値 $54\mathrm{g}$, 不偏標本分散 $\frac{22}{5}\mathrm{g}^2$ だった.

2 個のドーナツ製造マシンの製造するドーナツの重さの母平均値に差があるか知りたい. 帰無仮説を H_0: 差はない $\mu_1 - \mu_2 = 0$, として, 有意水準 $\alpha = 0.01$ で両側 2 標本 t 検定をしよう.

1. 有意水準 $\alpha = 0.05$ で,
2. 母平均値の差の両側 2 標本 t 検定を行う
3. 帰無仮説 H_0 を, 「…ドーナツの重さの母平均値は等しい: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ 」とする. すなわち, 対立仮説 H_1 を, $\mu_1 \neq \mu_2$ とする.
4. サイズ m, n の標本の, 標本平均値を $\overline{X}, \overline{Y}$, プールした不偏標本分散を S^2 とすると, 量 $T = \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{S^2 \cdot (\frac{1}{n}+\frac{1}{m})}}$ は, 帰無仮説のもとで自由度 $m+n-2$ の t 分布に従う. この量を検定統計量として用いる.
5. この標本に対して …
6. t 分布表より, …
   帰無仮説は…

対応のある 2 標本 t 検定

n 人の学生別に, 月曜日と水曜日の睡眠時間の睡眠時間のデータがあるとき, 月曜日と水曜日の差を考える, など. こちらのほうが精度がよい. ここではやらない.

ここまで来たよ

3 カイ二乗分布と t 分布

4 2 標本の平均値の差の区間推定と検定
- 正規分布にしたがう確率変数の差
- 2 標本 t 検定
- 両側検定と片側検定

片側検定

真の母平均値 μ

	両側検定 two-sided	片側検定 one-sided
帰無仮説 H_0	$\mu = \mu_0$	$\mu = \mu_0$
対立仮説 H_1	$\mu \neq \mu_0$	$\mu > \mu_0$ (または $\mu < \mu_0$, どちらか選ぶ)

今まではほとんど両側検定を使っていた.

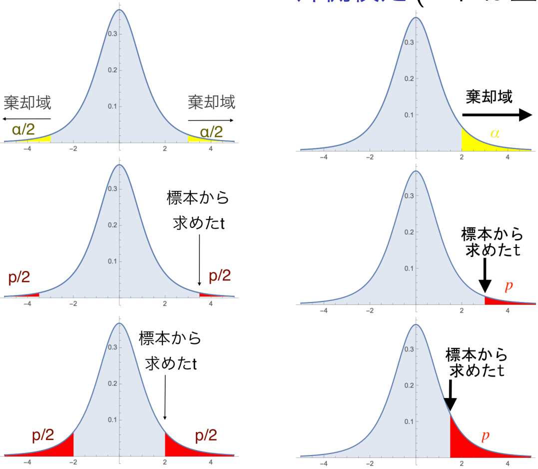
片側検定が向いている場合

- 大前提として, $\mu \geq \mu_0$ がわかっているとき
- $\mu < \mu_0$ のときは気にしたくないとき (例え話としては帰無仮説が $\mu \leq \mu_0$ みたいな感じ).

両側検定と片側検定の比較

両側検定

片側検定 (これは上側の例)



帰無仮説棄却

帰無仮説採用

L08-Q3

Quiz(片側 t 検定)

ドーナツ製造マシン 1 号の作るドーナツに含まれる不純物 X の質量は正規分布にしたがう．その母平均値は 100mg 以下であることが求められている．1 号で製造したドーナツの不純物の量を実際に測定したところ，不純物は次の量だけ含まれていた．

$104\text{mg}, 106\text{mg}, 106\text{mg}, 104\text{mg}.$

不純物 X の質量の母平均値 μ が $\mu_0 = 100$mg を越えていないかどうか，有意水準 $\alpha = 0.05$ で，片側 t 検定で判定しよう．

1. 有意水準 $\boxed{}$
2. $\boxed{}$ 検定を行う
3. 帰無仮説 H_0 を, $\boxed{}$, 対立仮説 H_1 を $\boxed{}$
4. $\boxed{}$ は, 帰無仮説のもとで $\boxed{}$ 分布に従う.
5. この標本に対して $\boxed{}$
6. $\boxed{}$ より帰無仮説を $\boxed{}$

L08-Q4

Quiz(片側 2 標本 t 検定)

ドーナツ製造マシン 1 号を改造して 3 号を作った, 製造するドーナツの重さの母分散は 1 号のままで, 母平均値は変わらないか大きくなったはずである.
1 号,3 号で製造したドーナツの重さは次のようだった.
1 号: $51\mathrm{g}, 52\mathrm{g}, 47\mathrm{g}, 50\mathrm{g}.$
3 号: $55\mathrm{g}, 56\mathrm{g}, 51\mathrm{g}, 52\mathrm{g}, 56\mathrm{g}, 54\mathrm{g}.$
3 号の製造するドーナツの重さの母平均値が 1 号よりも大きいかどうか知りたい. 対立仮説を H_0: $\mu_1 - \mu_2 < 0$, として, 有意水準 $\alpha = 0.01$ で片側 2 標本 t 検定をしよう.

母比率の検定やカイ二乗検定などにも両側検定と片側検定の区別がある.
今まではほとんど両側だけをやってきた.
適合度や独立性のカイ二乗検定は χ^2 が大きい場合だけを有意にしていたので実は片側検定をやっていた. 確率統計☆演習 II(2016)L3　確率統計☆演習 II(2016)L4

お知らせ

- L09 予習問題と同じタイミングで，「学期半ばのリフレクションレポート」をやりましょう．100 ピーナッツ以外の 3 ピーナッツ．
- 確率統計☆演習 I と同じセッティングで予習問題をやりましょう．
  `http://hig3.net` → RaMMoodle
  `https://el.math.ryukoku.ac.jp/moodle/` → 確率統計☆演習 II(2016)
- チューター/Math ラウンジ 月火水木昼 1-614

`https://manaba.ryukoku.ac.jp`
マイページの下の方に
manaba 出席カード提出

t 分布表

有意水準 α, 自由度 k に対して, $\alpha = P(T > t_\alpha(k))$ となる $t_\alpha(k)$ の値の表.

$k \backslash \alpha$	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.00025
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	0.816	1.080	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
$+\infty$	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291