F 分布・正規分布の 2 標本の母分散の F 検定・分散分析

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 II L09(2016-06-23 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2016-06-23 Thu 20:41 JST hig"

今日の目標

- F 分布の定義を説明できる
- 母分散の両側/片側 F 検定ができる
- 分散分析表の定義と意味を説明できる
- 分散分析表の F 検定ができる

http://hig3.net

L08-Q1

Quiz 解答:母平均値の差の区間推定 (母分散未知)

1. $\overline{X} = 50, \overline{Y} = 54.$
   $S^2 = \frac{1}{4+6-2}[(51-50)^2 + \cdots + (55-54)^2 + \cdots] = \frac{1}{8}[14+22] = \frac{9}{2}.$
2. $$(50-54) - t_{0.005}(8)\sqrt{\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)} < \mu_1 - \mu_2 < (50-54) + t_{0.005}(8)\sqrt{\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)}$$

$t_{0.005}(4+6-2)$ の括弧は関数の引数 (自由度) を示すもので,
$t_{0.005} \times (4+6-2)$ ではない.

L08-Q2

Quiz 解答:両側 2 標本 t 検定

1. 有意水準 $\alpha = 0.01$ で,

2. 母平均値の差の両側 2 標本 t 検定を行う
3. 帰無仮説 H_0 を, 「…ドーナツの重さの母平均値は等しい: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ 」とする. すなわち, 対立仮説 H_1 を, $\mu_1 \neq \mu_2$ とする.
4. サイズ m, n の標本の, 標本平均値を $\overline{X}, \overline{Y}$, プールした不偏標本分散を S^2 とすると, 量 $T = \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{S^2 \cdot (\frac{1}{n}+\frac{1}{m})}}$ は, 帰無仮説のもとで自由度 $n + m - 2$ の t 分布に従う. この量を検定統計量として用いる.
5. この標本に対して $T = \frac{-4}{\sqrt{\frac{1}{4+6-2}((4-1)\frac{14}{3}+(6-1)\frac{22}{5}))\cdot(\frac{1}{4}+\frac{1}{6})}} = -2.9218.$
6. t 分布表より, p 値 $P(|T| > 2.9218)$ は $\alpha = 0.01$ よりも大きい $(0.01 = P(|T| > 3.355)$ だから. あるいは, $2.9218 < t_{0.005}(8)$ だからといっても同じこと). よって帰無仮説は棄却されない.
母平均値が異なると有意水準 0.01 では結論できない.

L08-Q3

Quiz 解答:片側 t 検定

1. 有意水準 $\alpha = 0.05$ で,

2. 母平均値の片側 t 検定を行う
3. 帰無仮説 H_0 を，「$\mu = 100$ 」とする．対立仮説 H_1 を「$\mu > 100$」とする．
4. サイズ n の標本の，標本平均値を $\overline{X}$，不偏標本分散を S^2 とすると，量 $T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sqrt{S^2/n}}$ は，帰無仮説のもとで自由度 n の t 分布に従う．この量を検定統計量として用いる．
5. この標本に対して $T = \frac{105-100}{\sqrt{\frac{4}{3}\cdot(\frac{1}{4})}} = 8.660$.
6. t 分布表より，p 値 $P(T > 8.660)$ は $\alpha = 0.05$ よりも小さい $(0.05 = P(T > 2.353)$ だから．あるいは，$8.660 > t_{0.05}(3)$ だからといっても同じこと)．よって帰無仮説は棄却される．母平均値 μ は 100mg より大きいと有意水準 0.05 で結論する．

L08-Q4

Quiz 解答:片側 2 標本 t 検定

1. 有意水準 $\alpha = 0.01$ で，

2. 母平均値の差の片側 2 標本 t 検定を行う
3. 帰無仮説 H_0 を，「$\mu_1 - \mu_2 = 0$」とする．対立仮説 H_1 を「$\mu_1 - \mu_2 < 0$」とする．
4. サイズ m, n の標本の，標本平均値を $\overline{X}, \overline{Y}$，プールした不偏標本分散を S^2 とすると，量 $T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{S^2 \cdot (\frac{1}{m} + \frac{1}{n})}}$ は，帰無仮説のもとで自由度 $m + n - 2$ の t 分布に従う．この量を検定統計量として用いる．
5. この標本に対して $T = \frac{-4}{\sqrt{\frac{32}{8} \cdot (\frac{1}{4} + \frac{1}{6})}} = -2.9218.$
6. t 分布表より，p 値 $P(T < -2.9218)$ は $\alpha = 0.01$ よりも小さい $(0.01 = P(T > 2.896)$ だから．あるいは，$2.9218 > t_{0.01}(8)$ だからといっても同じこと)．よって帰無仮説は棄却される．3 号のほうが母平均値が大きいと有意水準 0.01 で結論する．

ここまで来たよ

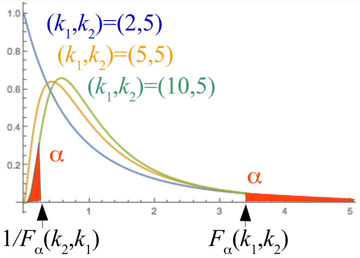
F 分布

F 分布

Y_{k_1}, Y_{k_2} が, それぞれ自由度 k_1, k_2 のカイ二乗分布にしたがう, 独立な確率変数とする: $Y_{k_1} \sim \chi^2(k_1), Y_{k_2} \sim \chi^2(k_2)$
このとき, 確率変数

$$F = \frac{Y_{k_1}/k_1}{Y_{k_2}/k_2}$$

のしたがう分布を自由度 (k_1, k_2) の F 分布といい, $F \sim \mathrm{F}(k_1, k_2)$ とかく.



$$Y_k = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_k^2.$$

$\mathrm{E}[Y_k] = k$, $\mathrm{V}[Y_k] = 2k$ だから, k_1, k_2 が大きいとき 1 あたりの値を取る分布.

F 分布表

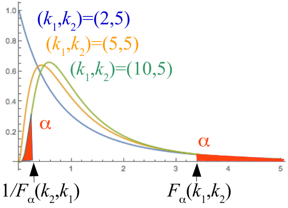
自由度 k_1, k_2 の F 分布にしたがう F に対して, $\alpha = P(F > F_\alpha(k_1, k_2))$ となる $F_\alpha(k_1, k_2)$ の値の表. $F = \frac{Y_{k_1}/k_1}{Y_{k_2}/k_2}$, $\quad Y_k \sim \chi^2(k)$.

$\alpha = 0.05$

$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$+\infty$
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.50
3	10.13	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812	8.786	8.526
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964	5.628
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735	4.365
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060	3.669
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637	3.230
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.687	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347	2.928
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137	2.707
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978	2.538
11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854	2.404
12	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.753	2.296
∞	3841	2.996	2.605	2.372	2.214	2.099	2.010	1.938	1.880	1.831	1.000

$\alpha = 0.025$

$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$+\infty$
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6	1018
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.50
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	13.90
4	12.22	10.65	9.979	9.605	9.364	9.197	9.074	8.980	8.905	8.844	8.257
5	10.01	8.434	7.764	7.388	7.146	6.978	6.853	6.757	6.681	6.619	6.015
6	8.813	7.260	6.599	6.227	5.988	5.820	5.695	5.600	5.523	5.461	4.849
7	8.073	6.542	5.890	5.523	5.285	5.119	4.995	4.899	4.823	4.761	4.142
8	7.571	6.059	5.416	5.053	4.817	4.652	4.529	4.433	4.357	4.295	3.670
9	7.209	5.715	5.078	4.718	4.484	4.320	4.197	4.102	4.026	3.964	3.333
10	6.937	5.456	4.826	4.468	4.236	4.072	3.950	3.855	3.779	3.717	3.080
11	6.724	5.256	4.630	4.275	4.044	3.881	3.759	3.664	3.588	3.526	2.883
12	6.554	5.096	4.474	4.121	3.891	3.728	3.607	3.512	3.436	3.374	2.725
$+\infty$	5.024	3.689	3.116	2.786	2.567	2.408	2.288	2.192	2.114	2.048	1.000



復習:母分散の両側カイ二乗検定

確率統計☆演習 I(2015)L13 未知の正規分布からの標本に基づき, 母分散が σ_0^2 かどうか判定したい!(σ_0^2 でないと言いたい)

- 帰無仮説 H_0 母分散 $\sigma^2 = \sigma_0^2$.
- 対立仮説 H_1 母分散 $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$.

$(n-1) \times S^2/\sigma_0^2$ は自由度 $n-1$ のカイ二乗分布にしたがう (S^2 不偏標本分散)

$$P(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < (n-1) \times \frac{S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)) = 1 - \alpha.$$

母分散の両側カイ二乗検定の棄却域

有意水準 α での棄却域は, 上の不等式の定める区間の外側

$$S^2 < \sigma_0^2 \times \frac{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}{n-1}, \quad \sigma_0^2 \times \frac{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}{n-1} < S^2$$

F 検定: 2 標本の分散の比に関する検定

	ある値と標本との比較	2 標本の比較	
母平均値	t 検定	2 標本 t 検定	差
母分散	カイ二乗検定	F 検定	比

× (片側, 両側)

F 検定の設計方針

共通の母分散 σ^2 を持つ正規分布からの 2 標本

- サイズ $n_1 \to$ 不偏標本分散 S_1^2
- サイズ $n_2 \to$ 不偏標本分散 S_2^2

$Y_{n_1-1} = (n_i - 1) \times S_i^2/\sigma^2$ は自由度 $n_i - 1$ のカイ二乗分布しがたう.

$$\text{不偏標本分散の比} \quad \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{Y_{n_1-1} \cdot \sigma^2/(n_1-1)}{Y_{n_2-1} \cdot \sigma^2/(n_2-1)} = \frac{Y_{n_1-1}/(n_1-1)}{Y_{n_2-1}/(n_2-1)}$$

は自由度 $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ の F 分布にしたがう (1 に近いはず). これが大小に極端な値をとったら, 母分散が共通の値 σ^2 であることを疑おう.

L09-Q1

Quiz(F 検定)

同じチェーン店のドーナツ屋さんの, 各支店で製造されるオールドファッションドーナツの重さは正規分布にしたがうという (母平均値や母分散は支店によってことなるかも).
支店 1 でオールドファッションドーナツのサイズ 10 の標本を得たところ, 不偏標本分散は $28\mathrm{g}^2$ だった.
支店 2 でオールドファッションドーナツのサイズ 5 の標本を得たところ, 不偏標本分散は $4\mathrm{g}^2$ だった.
2 つの支店で, 分布の母分散が異なるかどうか, 有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定しよう.

1. 有意水準 $\alpha = 0.05$ で,
2. 母分散の比の両側 F 検定を行う
3. 帰無仮説 H_0 を,「…ドーナツの重さの母分散は等しい: $\sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1$ 」とする. すなわち, 対立仮説 H_1 を, $\sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq 1$ とする.
4. 標本サイズを n_1, n_2, 不偏標本分散を S_1^2, S_2^2 とすると, 量
5. この標本に対して
6. F 分布表より,

L09-Q2

Quiz(片側 F 検定)

同じチェーン店のドーナツ屋さんの, 各支店で製造されるオールドファッションドーナツの重さは正規分布にしたがうという (母平均値や母分散は支店によってことなるかも).
支店 1 でオールドファッションドーナツのサイズ 10 の標本を得たところ, 不偏標本分散は $28\mathrm{g}^2$ だった.
支店 2 でオールドファッションドーナツのサイズ 5 の標本を得たところ, 不偏標本分散は $4\mathrm{g}^2$ だった.
支店 1 の母分散のほうが大きいかどうか, 有意水準 $\alpha = 0.05$ で片側検定しよう.

ここまで来たよ

量的データがカテゴリ変数に依存するか

例

問「ドーナツの重さの母平均値は支店に依存しない」か?

i	支店	データ	個数	標本平均値	不偏標本分散
1	瀬田	79,80,80,81	4	80	$\frac{1}{4-1}[(79-80)^2+\cdots]$
2	石山	78,86,81,83	4	82	
3	草津	81,81,80,82	4	81	
計			12	81	

仮定 各支店のデータは, 正規分布 $\mathrm{N}(\mu_i, \sigma^2)$ にしたがう. (支店番号 $i = 1, 2, 3$).

図解すると? 箱ひげ図や, 信頼区間の図を描いて様子を把握しよう.

分散分析の用語と記号

問「級内平均値は「水準」(=「群」or「級」) に依存しない」か?

水準	データ	個数	級内平均	残差平方和
A_1	$y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1r}$	r	$\overline{y}_{1\bullet}$	$\sum_j (y_{1j} - \overline{y}_{1\bullet})^2$
A_2	$y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2r}$	r	$\overline{y}_{2\bullet}$	$\sum_j (y_{2j} - \overline{y}_{2\bullet})^2$
$\vdots$				
A_ℓ	$y_{\ell 1}, y_{\ell 2}, \ldots, y_{\ell r}$	r	$\overline{y}_{\ell\bullet}$	$\sum_j (y_{\ell j} - \overline{y}_{\ell\bullet})^2$
計		$r\ell$	$\overline{y}_{\bullet\bullet}$	

$\bullet$ はその添字で平均したという意味.

級内平均値 $\overline{y}_{i\bullet} = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} y_{ij}$.

全平均値 $\overline{y}_{\bullet\bullet} = \frac{1}{r\ell} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{r} y_{ij}$.

$Y_{ij} \sim \mathrm{N}(\mu + a_i, \sigma^2)$, 独立. $\sum_i a_i = 0$.

別の書き方: $Y_{ij} = \mu + A_i + E_{ij}, \quad E_{ij} \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ 独立

問「$a_1 = a_2 = \cdots = a_\ell = 0$」 か?

L09-Q3

Example (分散分析表で使う記号の意味)

上の例で, 次は何に相当する?

r

ℓ

y_{12}

$\overline{y}_{1\bullet}$

$\overline{y}_{\bullet\bullet}$

$\sum_j (y_{1j} - \overline{y}_{1\bullet})^2$

分散分析を使うとき

量的変数 (ドーナツの重さ) の, カテゴリ変数 (支店) への依存性を考えるとき

$\leftrightarrow$ 2 水準の時は 2 標本 t 検定と同じ結果になる

$\leftrightarrow$ 条件が異なるとき, 回帰分析 (相関係数…), 2 元分割表の独立性の検定

分散 (=ばらつき) の比較に言い換え

「横の箱内のばらつきと, 縦 (箱の間) のばらつきは同じ」か? $a_i \neq 0$ なら縦によけいにばらつくはず.

横方向のばらつきの合計:E_{ij} の効果=残差平方和

$$S_{\mathrm{E}} = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{r} (y_{ij} - \overline{y}_{i\bullet})^2 \sim \chi^2((r-1)-(\ell-1))$$

縦方向のばらつきの合計:a_i の効果=級間平方和

$$S_{\mathrm{A}} = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{r} (\overline{y}_{i\bullet} - \overline{y}_{\bullet\bullet})^2 \sim \chi^2(\ell-1)$$

すべてのばらつきの合計=全平方和

$$S_{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{r} (y_{ij} - \overline{y}_{\bullet\bullet})^2$$

実は $S_{\mathrm{A}} + S_{\mathrm{E}} = S_{\mathrm{T}}$.

分散分析 (ANOVA) or 分散分析の F 検定 の方針.
(帰無仮説)$a_i = 0$ のもとで,
S_{E} は自由度 $\phi_{\mathrm{E}} = r\ell - \ell$ のカイ二乗分布,
S_{A} は自由度 $\phi_{\mathrm{A}} = \ell - 1$ のカイ二乗分布にしたがう
よって, $F = \frac{S_{\mathrm{A}}/(\ell-1)}{S_{\mathrm{E}}/(r\ell-\ell)}$ は自由度 $(\ell-1, r\ell-\ell)$ の F 分布にしたがう.
もし $a_i \neq 0$ なら, S_{A} が, したがって比 F が極端に大きくなる. 片側検定で $a_i \neq 0$ と結論する.

1 元配置の分散分析表

変動要因	平方和	自由度	平均平方	F
級間	S_{A}	$\phi_A = \ell - 1$	$V_A = S_A/\phi_A$	V_A/V_E
残差	S_{E}	$\phi_E = (r\ell - 1) - (\ell - 1)$	$V_E = S_A/\phi_A$	
全	S_{T}	$\phi_T = r\ell - 1$		

上の場合に作って分散分析しよう.

L09-Q4

Quiz(分散分析)

次のデータに対して, 1 元配置の分散分析表を作ろう. 有意水準 $\alpha = 0.05$ で F 検定しよう.

水準					
A_1	11	9	12	9	9
A_2	10	17	18	20	10
A_3	25	23	21	22	24

お知らせ

- L09 予習問題と同じタイミングで，「学期途中のリフレクションレポート」をやりましょう．100 ピーナッツ以外の 3 ピーナッツ．
- 確率統計☆演習 I と同じセッティングで予習問題をやりましょう．
  http://hig3.net → RaMMoodle
  https://el.math.ryukoku.ac.jp/moodle/ → 確率統計☆演習 II(2016)
- チューター/Math ラウンジ 月火水木昼 1-614

https://manaba.ryukoku.ac.jp
マイページの下の方に
manaba 出席カード提出

瀬田龍大生調査プロジェクト

何回かの授業にまたがって, チーム別で, 問題 (RQ=Research Question) をたて, 調査し, 検定して答をだします. 制約

- 指定の検定で答えられるような問題で.
- 母集団=瀬田学舎の龍大生. したがって問題は「瀬田学舎の龍大生の…は…か?」のようになるでしょう.
- 標本=確率統計☆演習 II 参加者. どこかの回で Web で調査します. 1 チームのできる質問は 1 個 or2 個の多肢選択 or 数値回答.

来週までの個人別プロジェクト manaba の科目のプロジェクトで,

- 指定の検定で答えられそうな問題を投稿 (コメント) する. 1 人 1 個.
- 指定の検定のことは, 確率統計☆演習 I/II の何回目の授業の配布資料の何ページ (複数かも) に書いてあるかを調べて, その位置を投稿 (コメント) する. 誰かが.