

ポアソン分布と指数分布

樋口さぶろお

龍谷大学工学部数理情報学科

確率統計☆演習 II L14(2016-07-28 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2016-07-28 Thu 13:17 JST hig"

今日の目標

- ポアソン分布, 指数分布のモーメント母関数, 母平均値, 母分散が求められる
- 現象をポアソン分布, 指数分布でモデルできる



<http://hig3.net>

瀬田龍大生調査プロジェクト講評

- 今回使った多くの検定は、実は「母分布は正規分布である」のような仮定が成立していないとただしくない。資料の説明箇所よく見てみて。負にならない身長が正規分布にしたがってるとかありうる？
 - ▶ しかし、検定の中には、正規分布 (や本来仮定している分布) から多少ずれていても、そんなにおかしくない結果が出る (頑健性) と信じられているものが多い。今回の問題案くらいは、この検定でやっちゃう人が多い
- 持ってる靴の個数=24.5 みたいなへんな答あるよね～
 - ▶ こういうデータは、やらせにならないように慎重に削除する。データのクリーニング、クレンジング、前処理などという、避けて通れない大事な手続き
 - ▶ うっかりした回答や意図と異なる回答が起きないように、質問文は慎重に書く、回答システムは慎重に設計する必要がある。このへんは今回は樋口がやっちゃいました。
- とにかくスライド作れ、って言ったけど、本来はスライドは口頭発表しやすいように作るもの。物理実験思い出して。基礎セミナー (樋口) 参加者にきいてみて。
- チーム 5,6 人は多かったね～ 2人以上3人以下 or 3人以上5人以下?

ここまで来たよ

3 瀬田龍大生調査プロジェクト

4 ポアソン分布と指数分布

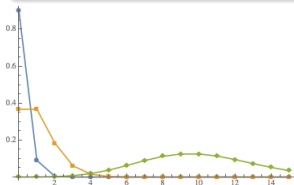
- ポアソン分布
- 指数分布

ポアソン分布

ポアソン分布

離散型確率変数 X が次の確率分布を持つとき, X はパラメタ λ のポアソン分布 $Po(\lambda)$ に従うという.

$$P(X = k) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} & (k = 0, 1, 2, 3, \dots) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$



Po(0.1), Po(1), Po(10)

意味: 独立に, 時間に比例して, 単位時間に平均すると λ 回起きる事象が, 単位時間内に k 回起きる確率.

ポアソン分布のモーメント母関数と期待値

$$M_X(t) = \exp(\lambda(e^t - 1))$$

$$E[X] = \square, V[X] = \square$$

L14-Q1

Quiz(ポアソン分布)

$X_1 \sim \text{Po}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \text{Po}(\lambda_2)$ ならば $Y = X_1 + X_2 \sim \text{Po}(\lambda_1 + \lambda_2)$, すなわちポアソン分布は再生性を持つことを示そう.

L14-Q2

Quiz(ポアソン分布)

ある県では、交通死亡事故が、平均すると1日に3件起きるといふ。1日の事故の件数はパラメタ $\lambda = 3$ のポアソン分布に従う。

- ① 特定の1日に、交通死亡事故が0件である確率を求めよう。
- ② 特定の1日に、交通死亡事故が6件である確率を求めよう。
- ③ 1日に起きる交通死亡事故の件数の分散を求めよう。

ポアソン分布と二項分布の似ているところ違うところ

	ポアソン分布 $Po(\lambda)$	二項分布 $B(n, p)$
??に k 回		
k の上限		
母平均値		
母分散		

L14-Q3

Quiz(ポアソン分布)

あるサッカーチームは、1 ゲームで平均 4.5 点得点できる。1 ゲームで得点が 4, 5, 6 点である確率は?

L14-Q4

Quiz(二項分布)

帝国軍クロントゥルーパーからなる, あるサッカーチームは, PK 成功率が 0.9 である. 5 人が蹴る PK 戦で得点が 4, 5, 6 点である確率は?

L14-Q5

Quiz(ポアソン分布)

あるサッカーチームは、90分のゲームで平均3点得点できる。

- ① ハーフ 45 分間に 0 点である確率は?
- ② ハーフ (前半) 0 点 かつ ハーフ (後半) 3 点である確率は?
- ③ ゲーム 90 分で 3 点であるときに、ハーフ (前半) 0 点, ハーフ (後半) 3 点である確率は?

ここまで来たよ

3 瀬田龍大生調査プロジェクト

4 ポアソン分布と指数分布

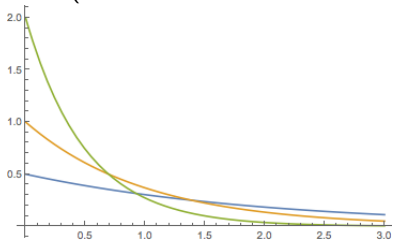
- ポアソン分布
- 指数分布

指数分布

連続型確率変数 X での確率密度関数をもつものをパラメタ $\lambda > 0$ の指数分布にしたがうという.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x > 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

意味:
独立で、頻度が時間の長さに比例して (単位時間に平均 λ 回) 起きるできごと (その回数はポアソン分布にしたがう) の、おきる時間間隔 x の分布.



$\lambda = 0.5, 1, 2$

指数分布のモーメント母関数と期待値

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad (t < \lambda)$$

$$E[X] = \boxed{}, V[X] = \boxed{}$$

L14-Q6

Quiz(指数分布)

あるサッカーチームは、1 ゲーム 90 分で平均 4.5 点得点できる。翌日以降のゲームもつなげて考える。

- ① 得点と得点の時間間隔の母平均値を求めよう。
- ② 得点と得点の時間間隔が 5 分未満である確率を求めよう。
- ③ 得点と得点の時間間隔が 15 分以上 25 分未満になる確率を求めよう。

L14-Q7

Quiz(指数分布)

あるシステムの故障は、互いに独立に、時間に比例する頻度で発生する。1時間に平均 0.3 回の故障が発生する。

- 1 時間の故障回数の母平均値と母標準偏差を求めよう。
- 故障と故障の時間間隔の母平均値と母標準偏差を求めよう。
- 1 時間に 1 回または 2 回の故障が起きる確率を求めよう。
- 故障と故障の時間間隔が 120 分以上である確率を求めよう。

分布の間の関係:二項分布の極限としてのポアソン分布

ポアソンの小数の法則

$B(n, p)$ で, $np = \lambda = \text{一定}$, $n \rightarrow +\infty, p \rightarrow 0$ の極限をとると $Po(\lambda)$ になる.

1 時間を n 等分して, それぞれの枠に, イベントが (多くても 1 回) 確率 $p = \frac{\lambda}{n}$ で起きるとすると $B(n, p = \frac{\lambda}{n})$.

n 回中 k 回起きる確率.

$$\begin{aligned} & \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \times \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!n^k} \times \frac{\lambda^k}{k!} \times \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \times \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\ &\rightarrow 1 \times \frac{\lambda^k}{k!} \times e^{-\lambda} \times 1 \quad (n \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

幾何分布の極限としての指数分布

対応

時間	カウントデータ	時間の間隔
離散	二項分布 (離散) $\downarrow np = \lambda, n \rightarrow \infty$	幾何分布 (離散)
連続	ポアソン分布 (離散)	指数分布 (連続)

 $k = nx$ 回目 (x 時間目) に起きる確率

$$\frac{\lambda}{n} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{nx} \rightarrow \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

 $dx = \frac{1}{n}$. 確率から確率密度関数に変更するための調整.

お知らせ

- 来週までの予習問題あります. 非参照 Quiz ではなくファイナルトリアルに備えるため
- これまで+今日提出したものは 1-503 向かい掲示板前で返却
- manaba で全学授業アンケート
- manaba で「学期末のリフレクション」をやりましょう. 100 ピーナッツ以外の 3 ピーナッツ.
- 事前作成用外部記憶ペーパー配布中
<https://register.math.ryukoku.ac.jp/archive/>
- チューター/Math ラウンジ 月火水木昼 1-614



<https://manaba.ryukoku.ac.jp>
マイページの下の方に
manaba 出席カード提出

ファイナルトライアル計画!

2016-08-04 木 2, 外部記憶ペーパー A4 両面 1 枚使用可 (計算科学☆実習 B と方式は異なる).
45 ピーナッツ.

出題計画 2016-07-28 木に確定します.

去年の問題は参考程度に. 非参照 Quiz ができるようになっておくことをおすすめします.
過去の外部記憶ペーパーをまとめて使えば?

<https://register.math.ryukoku.ac.jp/archive/>

必要な数表は問題とともに配布します.

- 正規分布にしたがう確率変数の和と差のしたがう分布 (L08)
- 標本が与えられたとき 2 標本 t 検定する (L08, 非参照 Quiz L09)
- 何かの片側検定 (L08, 非参照 Quiz L09)
- F 分布・F 検定 (L09, 非参照 Quiz L10)
- 分散分析 (L10, 非参照 Quiz L11 + F 統計量を用いた検定)
- 2 次元正規分布 (L11, 非参照 Quiz L12)
- 二項分布 (L12, 非参照 Quiz L13)
- 幾何分布 (L12, 非参照 Quiz L13)
- ポアソン分布 (L14)
- 指数分布 (L14)