４月８日まとめ　　　　　　　　　　　　　　　　　　ｔ９９００２２　大坪　哲雄

・四章　角運動量保存の法則

・４－１　中心力

原点Ｏから距離rのところにある質量mの質点に対してrと運動方程式のベクトル積を作ると、角運動量保存の法則が導かれる。

$$p = m\dot{r}$$

$\dot{P} = m\ddot{r} = F$　より、両辺に×rして

$$r \times F = r \times \frac{dp}{dr} \quad ・・・（１）$$

（１）式の左辺は力のモーメント

$N = r \times F$ ・・・（２）である。

（１）式の右辺は

（右辺）$= \dfrac{d}{dt}(r \times p) - \dot{r} \times p = \dfrac{d}{dt}(r \times p)$ ・・・（３）と書ける。

この、$L = r \times p$ ・・・（４）を原点Ｏまわりの角運動量という。

以上より、角運動量と力のモーメントの関係

$N = \dfrac{dL}{dt} = \dot{L}$ ・・・（５）が得られる。

$$r = \hat{i} \cdot r \cdot \cos\theta + \hat{j} \cdot r \cdot \sin\theta$$
$$\dot{r} = \hat{i}(\dot{r} \cdot \cos\theta - r \cdot \sin\theta \cdot \dot{\theta}) + \hat{j}(\ ・・・)$$
$$\ddot{r} = \hat{i}(\ddot{r} \cdot \cos\theta - 2\dot{r} \cdot \sin\theta \cdot \dot{\theta} - r \cdot \sin\theta \cdot \ddot{\theta}) + \hat{j}(\ ・・・)$$
$$= (\ddot{r} - \dot{r}\theta^2)\underbrace{(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta)}_{\hat{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\underbrace{(-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta)}_{\hat{l}}$$

上式より、

$$m\ddot{r} = F_r \cdot \hat{r} + F_\theta \cdot \hat{l}$$

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r \cdot \dot{\theta}^2) = F_r \\ m(r \cdot \ddot{\theta} + 2\dot{r} \cdot \dot{\theta}) = F_\theta \end{cases} \quad ・・・（２．７２）$$

上記の運動方程式に

$L = mrv_0\hat{z} = mr^2\dot{\theta} \cdot \hat{z}$ ・・・（６）を用いれば、

$|L| = mr \cdot r\dot{\theta} = mr^2\dot{\theta}$　より、

$\dot{\theta}$を消去して、

・ $m\ddot{r} - mr\left(\frac{|L|}{mr^2}\right)^2 = F_r$ ・・・（８）

・ $|L| = mr^2\dot{\theta} =$ ＜一定＞・・・（９）が得られる。