

以下では中心力が働いているとき、物体がどのような運動をするかを考える。

P100

(21)より、 $\Omega$ が求まるので周期 $T = 2\pi/\Omega$ が求められる。

物体が軌道から半径方向にずれている場合を考えると、(22)より、ベキ級数展開を行うと(23)が得られ、(20)を代入すると(24)を求めることができる。

(24)より  $\ll r_0$ より  $= \sqrt{\frac{g}{r_0}}$ なので(25)が求められる。

(25)の $g$ と $r_0$ に注目すると、これらは一定であるため、この運動は安定な形態であるといえる。

(24)の変数 $\varepsilon$ について解く。

$$= e^{\lambda t}$$

$$\left(\lambda^2 + \frac{3g}{2r_0}\right)e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{3g}{2r_0}}i$$

$$(t) = C_1 e^{\sqrt{\frac{3g}{2r_0}}it} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{3g}{2r_0}}it}$$

$$(t) = C_1 \left( \cos \sqrt{\frac{3g}{2r_0}}t + i \sin \sqrt{\frac{3g}{2r_0}}t \right) + C_2 \left( \cos \sqrt{\frac{3g}{2r_0}}t - i \sin \sqrt{\frac{3g}{2r_0}}t \right)$$

$$(t) = \varepsilon_0 \cdot \cos(\omega t + \alpha_0) = \varepsilon_0 (\cos \omega t \cos \alpha_0 - \sin \omega t \sin \alpha_0) \dots (26)$$

t=0 初期条件  $r(0) = r_0 + \varepsilon_0$

$$\dot{r}(0) = 0 \quad \text{より、}$$

$$r(t) = r_0 + \varepsilon_0 \cos(\omega t + \alpha_0) \dots (27)$$

$$r(0) = r_0 + \varepsilon_0 \cos \alpha_0 = r_0 \quad \dots$$

$$\dot{r}(0) = -\varepsilon_0 \omega \sin \alpha_0 = 0 \quad \dots$$

、より  $(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t$

$$r(t) = r_0 + \varepsilon_0 \cos \omega t \dots (28) \quad \text{となる。}$$

これは、円軌道上を振動しながら運動するものである。

(29)より、(28)を代入すれば(30)が得られ質点の角位置(31)が与えられることになる。

また、(31)は $\theta(t) = \Omega(t - \frac{2\varepsilon_0}{\omega r_0} \sin \omega t)$ より、運動が速くなったり、遅くなったりすることを示している。これはケプラーの第二法則である。

### ケプラーの法則

第一法則：惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道上を動く

第二法則：惑星が一定の時間に動径が描く面積は一定である

太陽に近いところでは速く動き、遠いところではゆっくり動く。

第三法則：惑星の公転周期の二乗は太陽からの平均距離の三乗に比例する

有効一次元ポテンシャルエネルギーを使い、動径方向の運動方程式の完全解を求める。

(13)(15)より、この体系の有効一次元ポテンシャルエネルギーは(32)となる。

(15)(16)(18)より全エネルギーEを求め、そこから動径速度 $\dot{r}$ を求める。

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{1}{m} [E - V_{\text{eff}}(r)]} \quad \dots \dots \dots (34)$$

から、運動の実現可能な領域は

$$V_{\text{eff}}(r) \leq E \quad \dots \dots \dots (35)$$

から決まる。これは一つの中心点を持つ軌道が複数存在していることを示している。