

4 - 2 惑星の運動 (P.103)

万有引力とクーロン力の保存力に対するポテンシシャルエネルギーは

$$V(r) = -\frac{a}{r} \quad \dots \quad (39)$$

r と θ の関係を表す軌道方程式は、(10) (13) から

$$d\theta = \frac{|L|}{mr^2} dt$$

$$dr = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - V_{\text{eff}}(r)]} dt \quad \dots \quad (40)$$

$$(V_{\text{eff}}(r) = V(r) + |L|^2 / 2mr^2)$$

両式から dt を消去し、積分すると、

$$\int_{\theta}^{\theta} d\theta = \pm |L| \int_r^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{2m[E - V(r) - |L|^2 / 2mr^2]}} \quad \dots \quad (41)$$

$$\theta = \pm |L| \int_r^r \frac{dr}{r \sqrt{2mEr^2 + 2mar - |L|^2}} \quad \dots \quad (42)$$

(42) は、 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$ の公式より、

$$\theta + C = \pm \arcsin \left(\frac{mar - |L|^2}{\varepsilon mar} \right) \quad \dots \quad (43)$$