５月２７日　　セミナー　まとめ　　　ｔ990086　西出加奈子

4‐3　離心率ベクトル

（39）のようなポテンシャルエネルギーを受けている質量mの粒子の運動方程式

$$\dot{\mathbf{p}} = -\alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3} \qquad ・・・（56）$$

（56）の両辺と $\mathbf{L}$ のベクトル積を作ると

$$\mathbf{L} \times \dot{\mathbf{p}} = -\alpha \frac{1}{r^3} \mathbf{L} \times \mathbf{r} \qquad ・・・（57）$$

$\mathbf{L}$ は時間によらない定数であるから、（57）の左辺は

$$\mathbf{L} \times \dot{\mathbf{p}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\mathbf{L} \times \mathbf{p}) \qquad ・・・（58）$$

（58）の右辺＝

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\mathbf{L} \times \mathbf{p}) - \dot{\mathbf{L}} \times \mathbf{p}$$

$$= (\dot{\mathbf{L}} \times \mathbf{p} + \mathbf{L} \times \dot{\mathbf{p}})$$

＝（58）の左辺

（57）の右辺について $\mathbf{L} = \mathrm{m}\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ の定義式よりベクトル３重積に関する恒等式を用いて解くと

$$-\frac{\alpha}{r^3} \mathbf{L} \times \mathbf{r} = \frac{m\alpha}{r^3}[\mathbf{r}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}) - \dot{\mathbf{r}} r^2] \qquad ・・・（59）$$

ベクトル３重積→ $(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{r} = \mathbf{r}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}) - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{r}^2$

（59）の右辺はさらに一つの時間微分にまとめることができる

$$-m\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$

$$= -m\alpha \frac{\dot{\mathbf{r}} r - \mathbf{r}\dot{r}}{r^2}$$

$$= -\frac{m\alpha}{r^3}\left[\dot{\mathbf{r}} r^2 - \mathbf{r}(\dot{r} r)\right]$$

より

$$-\frac{\alpha}{r^3} \mathbf{L} \times \mathbf{r} = -m\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \qquad ・・・（60）$$

（58)、（60）を（57）に代入すると

$$\mathbf{L}\times\dot{\mathbf{p}} = -\alpha\frac{1}{r^3}\mathbf{L}\times\mathbf{r}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{L}\times\mathbf{p}) = -m\alpha\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \qquad ・・・(61)$$

$$\frac{d}{dt}\left(-\mathbf{L}\times\mathbf{p} - m\alpha\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = 0$$

よって括弧内を計算するとベクトル量

$$\varepsilon = -\frac{\mathbf{L}\times\mathbf{p}}{m\alpha} - \hat{\mathbf{r}} \qquad ・・・(62) \qquad\qquad \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$ ←r 方向の単位ベクトル

を求めることができる。(62）は運動の定数になっている。ベクトルεの大きさは

$$\varepsilon^2 = \varepsilon\cdot\varepsilon = \frac{|\mathbf{L}|^2 p^2 - (\mathbf{L}\cdot\mathbf{p})^2}{(m\alpha)^2} + \frac{2\mathbf{L}\times\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{m\alpha} + 1$$

$$= \frac{|\mathbf{L}|^2 p^2}{(m\alpha)^2} - \frac{2|\mathbf{L}|^2}{m\alpha r} + 1$$

$$|\mathbf{L}|^2 = -\mathbf{L}\times\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}$$
$$= -(\mathbf{p}\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{L}$$
$$= -(-\mathbf{L})\cdot\mathbf{L}$$

$$\therefore \qquad \varepsilon^2 = \frac{2|\mathbf{L}|^2}{m\alpha^2} - \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r}\right) + 1 \qquad ・・・(63)$$

（63）の（　）の中の量はちょうど粒子のエネルギーE

$$\mathrm{E} = \mathrm{T} + V = \frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r} \qquad ・・・(64)$$

になっている。したがって、εは$|\mathbf{L}|$と E により

$$\varepsilon^2 = \frac{2|\mathbf{L}|^2}{m\alpha^2} - E + 1$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E|\mathbf{L}|^2}{m\alpha^2}} \qquad ・・・(65)$$

この量はまさしく(44)、(46）で見た軌道の離心率になっているのでこの相関関係によりε

を離心率ベクトルという。

軌道方程式を求めるには、まずεと$\mathbf{r}$のスカラー積を作る。

$$\varepsilon\cdot\mathbf{r}=\left(-\frac{\mathbf{L}\times\mathbf{p}}{m\alpha}-\hat{\mathbf{r}}\right)\cdot\mathbf{r}$$

$$=\frac{-\mathbf{L}\times\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{m\alpha}-r \quad ・・・(66)$$

$$-\mathbf{L}\times\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}$$
$$=-(\mathbf{p}\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{L}$$
$$=-(-\mathbf{L})\cdot\mathbf{L}$$

を用いて

$$\varepsilon\cdot\mathbf{r}=\frac{|\mathbf{L}|^2}{m\alpha}-r \quad ・・・(67)$$

を得ることができる。

ここでεから測った$\mathbf{r}$の方向の角度θを

$$\varepsilon\cdot\mathbf{r}=\varepsilon r\cos\theta \quad ・・・(68)$$

で定義する。

$$r(\theta)=\frac{\varepsilon\cdot\mathbf{r}}{\varepsilon\cos\theta}$$

（67)、(68）より

$$r(\theta)=\frac{\frac{|\mathbf{L}|^2}{m\alpha}-r(\theta)}{\varepsilon\cos\theta}$$

$$\varepsilon\cos\theta r(\theta)=\frac{|\mathbf{L}|^2}{m\alpha}-r(\theta)$$

$$(1+\varepsilon\cos\theta)r(\theta)=\frac{|\mathbf{L}|^2}{m\alpha}$$

$$r(\theta)=\frac{|\mathbf{L}|^2/m\alpha}{1+\varepsilon\cos\theta} \quad ・・・(69)$$

軌道方程式（69）が得られる。

これは（46）で$\theta_0=0$とおいたものと一致している。

離心率ベクトルは円錐曲線の対称軸に重なっている。