$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = 一定 \qquad \cdots①$$

$$\underline{E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{\left|\vec{L}\right|^2}{2mr} - \frac{\alpha}{r}} \quad \cdots②$$

Ｖｅｆｆ

$\dot{r}$　の微分方程式について解く

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{\left|\vec{L}\right|}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}\right)}$$

$$= \frac{1}{r}\sqrt{\frac{-2E}{m}}\sqrt{(r - a(1+\varepsilon))(r - a(1-\varepsilon))} \qquad \cdots③$$

ここで変数変換$r \to u$とすると

rとuの関係は、

$$r = a(1 - \varepsilon\cos\theta)$$

となり、uとθの関係は、

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\tan\frac{u}{2}$$

となる。

$\dot{r} = a\varepsilon\sin u \cdot \dot{u}$　　これを③に代入すると。

$$a\varepsilon\sin u \cdot \dot{u} = \frac{1}{a(1-\varepsilon\cos u)}\sqrt{\frac{-2E}{m}}\sqrt{a\varepsilon(1+\cos u) \cdot a\varepsilon(1-\cos u)}$$

計算していくと

$$(1 - \varepsilon\cos u)\dot{u} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{-2E}{m}}$$

となり、ここで両辺をt積分すると、

$$u - \varepsilon\sin u = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{-2E}{m}}(t - t_0)$$

となる。これはケプラー方程式と呼ばれるものである

楕円の場合

①　　tが与えられた。

②　　ケプラー方程式をニュートン法で解き$u\left(t\right)$　を求める。

$$u(t)-\varepsilon\sin u=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{-2E}{m}}\left(t-t_0\right)$$

③　　この$u\left(t\right)$から

$$r(t)=a\left(1-\varepsilon\cos u(t)\right)$$

$$\tan\frac{\theta(t)}{2}=\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\tan\frac{u(t)}{2}\quad\rightarrow\quad\theta(t)=2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\tan\frac{u(t)}{2}\right)$$

で求める。

④　　$r(t),\theta(t)$から位置決定。

双曲線の場合

②　　$$-u(t)+\varepsilon\sinh u(t)=\sqrt{\frac{\alpha}{ma^3}}\left(t-t_0\right)$$

③　　$$r(t)=a\left(\varepsilon\cosh u(t)-1\right)$$

$$\theta(t)=2\arctan\left(\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}}\tanh\frac{u(t)}{2}\right)$$

放物線の場合

②　　$$\frac{1}{6}u^3(t)+u(t)=\sqrt{\frac{\alpha}{m\lambda^3}}\left(t-t_0\right)$$

③　　$$r(t)=\lambda\left(1+\frac{u^2}{2}\right)$$

$$\theta(t)=2\arctan\frac{u(t)}{\sqrt{2}}$$