理論物理学特論 aka 集合★位相＋演習 II ファイナルトライアル

樋口さぶろお[1]　配布: 2007-07-23 Mon 更新: Time-stamp: ”2007-07-28 Sat 11:44 JST hig”

ファイナルトライアル参加案内

両面です．全部で 5 問です．外部記憶ペーパー作成 10 分＋答案作成 80 分です．

1. 解答用紙の 1 面に 1 問ずつ, 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

$\mathbb{R}^2$ の部分集合 $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1 \text{ または } x^2 + y^2 > 4\}$ が開集合であることを証明しよう.

参加者を惑わせるためのヒント　定理 ‘U_1, U_2 が開なら $U_1 \cup U_2$ も開’, を使うか, 定義にしたがってストレートに証明するか, でしょうか. 後者の場合,

> 任意の $(x, y) \in U$ を考える. $x^2 + y^2 < 1$ の場合と $x^2 + y^2 > 4$ の場合に場合分けする ...

のように始まるでしょう.

2

$\mathbb{R}$ の点列 $[x_n]_{n=1}^{\infty}$ ただし $x_n = n^{-1/3}$ を考える. この点列が $0 \in \mathbb{R}$ に収束することを, 収束の定義にしたがって証明しよう.

3

図に示した $\mathbb{R}^2$ の部分集合 S について,

1. 内部 (開核)

---

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

2. 外部

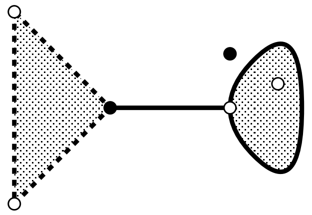
3. 境界

4. 閉包

5. 導集合

6. 孤立点の集合

をそれぞれ描こう．理由は省略してかまいません．線上を含む/含まない場合は実線/点線, 点を含む/含まない場合は黒丸/白丸を使ってます/使いましょう．



4

写像に関する次の問に選択肢の記号で答えよう．理由は述べなくてよい．写像 $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_1(x) = |x|$, 写像 $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g_2(x) = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ +1 & (x > 0) \end{cases}$$

1. g_1 による $(-1, +3)$ の像を求めよう．
   (a) $(+1, 3)$
   (b) $[0, 3)$
   (c) $(-3, +3)$
   (d) $[-1, +3)$
2. g_1 による $(-1, +3)$ の逆像 (原像) を求めよう．
   (a) $(+1, 3)$
   (b) $[0, 3)$
   (c) $(-3, +3)$
   (d) $[-1, +3)$
3. g_1 の値域を求めよう．
   (a) $[0, +\infty)$
   (b) $(-\infty, 0]$
   (c) $\mathbb{R}$
   (d) $\{0\}$
4. g_2 による $[0, 3)$ の逆像 (原像) を求めよう．
   (a) $[0, +\infty)$
   (b) $(-\infty, 0]$
   (c) $\mathbb{R}$
   (d) $\{0\}$
5. $\lim_{x \downarrow 0} g_2(x)$ を求めよう．
   (a) -1
   (b) $+1$
   (c) 0
   (d) $+\infty$
6. 次のうち全単射でないもの選ぼう．
   (a) $(0, 1) \ni x \mapsto 10x + 10 \in (10, 20)$
   (b) $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sinh x \in \mathbb{R}$
   (c) $[0, 2\pi) \ni x \mapsto \mathrm{e}^{ix} \in \{z \in \mathbb{C} | \, |z| = 1\}$
   (d) $\mathbb{R} \ni x \mapsto \mathrm{e}^x \in \mathbb{R}$.
7. 単射でないものを選ぼう．
   (a) $\mathbb{Z} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{Z}$.
   (b) $\mathbb{Z} \ni x \mapsto 2x \in \mathbb{Z}$.
   (c) $\mathbb{R} \in x \mapsto \sin(x) \in \mathbb{R}$.
   (d) $[0, 1) \ni x \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i x} \in \mathbb{C}$.
8. 全射を選ぼう．
   (a) $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R}$.
   (b) $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$.
   (c) $\mathbb{R}^2 \ni \mathbf{v} \mapsto |\mathbf{v}| \in \mathbb{R}$.
   (d) $\{x \in \mathbb{R} | x > 0\} \ni x \mapsto \cosh x \in \mathbb{R}$.
9. 0 または正の実数を定義域とする関数 $g_6(x) = x^2 + 2x + 2$ の逆関数を選ぼう．
   (a) $\sqrt{x - 1} - 1$
   (b) $\sqrt{x}$
   (c) $\frac{1}{x^2 + 2x + 2}$
   (d) $\sqrt{x} + \frac{1}{2}x + 2$
10. 一般の写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と部分集合 $S \subset \mathbb{R}$ に対して成立しない関係式を選ぼう．
   (a) $f(f^{-1}(S)) \subset S$
   (b) $f(f^{-1}(S)) \supset S$
   (c) $f^{-1}(f(S)) \subset S$
   (d) $f^{-1}(f(S)) \supset S$

5

写像に関する次の問に選択肢の記号で答えよう．理由は述べなくてよい．

1. $x = 1$ または $x < -3$ を否定したものを選ぼう．
   (a) $x \neq 1$ または $x \geq -3$.
   (b) $x \neq 1$ かつ $x \geq -3$.
   (c) $x \neq 1$.
   (d) $x \geq -3$.
2. S: (死んだ人も含め) 人間の集合．$P(x, y)$: x は y の母親．常識的に正しいものを選ぼう．
   (a) $\forall x \in S\ \forall y \in S\ \ P(x, y)$.
   (b) $\forall y \in S\ \exists x \in S\ \ P(x, y)$.
   (c) $\forall x \in S\ \exists y \in S\ \ P(x, y)$.
   (d) $\exists x \in S\ \forall y \in S\ \ P(x, y)$.
3. 命題‘すべての潜水ガモは助走なしに水面から飛び立つことができない’の否定と同値であるものをえらぼう．
   (a) すべての潜水ガモは助走なしに水面から飛び立つことができる．
   (b) 助走なしに水面から飛び立つことができる潜水ガモもいる．
   (c) 潜水ガモ以外は助走なしに水面から飛び立つことができる．
   (d) カルガモやオシドリなどの淡水ガモは助走なしに水面から飛び立つことができる．
4. 命題‘潜水ガモは助走なしに水面から飛び立つことができない’の対偶を選ぼう．
   (a) 潜水ガモではないならば助走なしに水面から飛び立つことができる．
   (b) 助走なしに水面から飛び立つことができるならば潜水ガモではない．
   (c) 水面から飛び立つことができない鳥は潜水ガモである．
   (d) 潜水ガモは水中で貝などの餌をとる．
5. $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して正しいものを選ぼう．
   (a) $\exists m \forall n\ m > n$
   (b) $\forall m \forall n\ m > n$
   (c) $\forall n \forall m\ m > n$
   (d) $\forall n \exists m\ m > n$

理論物理学特論 aka 集合★位相＋演習 II ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお[2]　配布: 2007-07-23 Mon 更新: Time-stamp: ”2007-07-28 Sat 11:44 JST hig”

1

$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$, $U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 4 < x^2 + y^2\}$ とすると, $U = U_1 \cup U_2$ である. 開集合の和集合は開集合なので, U_1, U_2 が開であることを示せばよい.

例として U_2 について示す.

$(x, y) \in U_2$ とする. $\epsilon = 2 - d((x, y), (0, 0))$ とすると, $N((x, y); \epsilon) \subset U_2$ である. なぜなら, $p \in N((x, y); \epsilon)$ とすると, 三角不等式より,

$$d((x, y), p) + d(p, (0, 0)) \geq d((x, y), (0, 0))$$

よって

$$d(p, (0, 0)) \geq d((x, y), (0, 0)) - d(p, (x, y)) > \epsilon + d((x, y), (0, 0) = 2.$$

よって, $p \in U_2$.

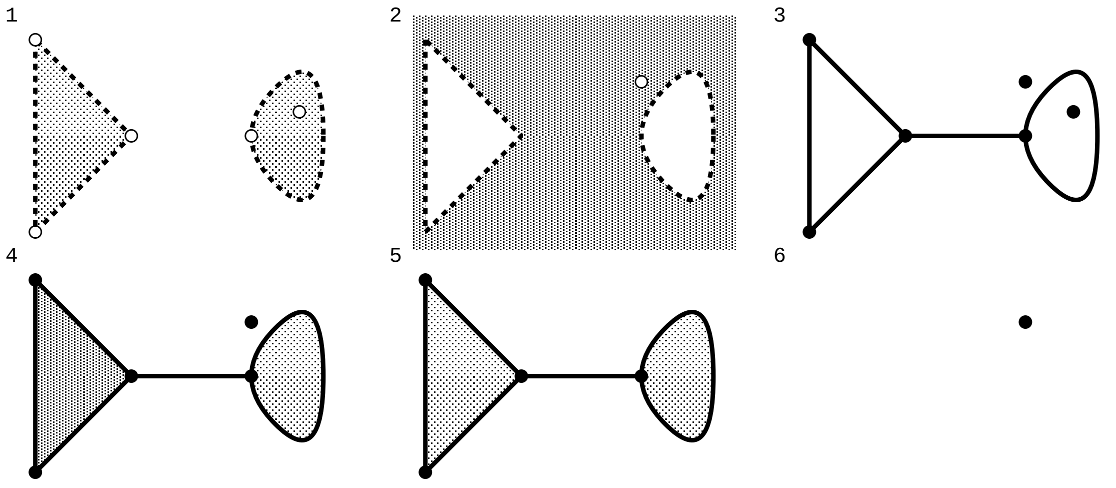
2

任意の $\delta > 0$ が与えられたとき, N を $N \geq \delta^{-1/3}$ となる整数にとる. $k > N$ となる k に対して,

$$|x_k - 0| = k^{-1/3} < N^{-1/3} \leq \delta.$$

よって, $x_n \to 0$.

3



hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

4

1. (b)
2. (c)
3. (a)
4. (a)
5. (b)
6. (d)
7. (a),(c)
8. (b)
9. (a)
10. (b),(c)

5

1. (b)
2. (b)
3. (b)
4. (b)
5. (d)

お知らせ

http://hig3.net