

理論物理学特論 aka 線形代数・演習 III プチテスト

樋口さぶろお¹ 配布: 2009-06-04 Thu 更新: Time-stamp: "2009-06-12 Fri 21:17 JST hig"

プチテスト参加案内

片面です．全部で5問です．50分くらい？

1. 過程も答えよう．最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう．
2. 問題文に現れない記号を使うときは，定義を記そう．

1

行列 $X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ に対して， e^X を求めよう．

2

行列 $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ に対して， e^X を求めよう．

3

行列 $X = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ に対して，Jordan の標準形と基底変換行列を求めよう．

4

m を自然数とする．直交行列全体 $G = \{M \mid M \text{ は } m \times m \text{ 実行列, } {}^t M = M^{-1}\}$ は行列の乗法を演算として群になっていることを示そう．

5

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく．集合 $G = \{E, -E, R, -R\}$ は行列の乗法を演算として群になっていることを示そう．

¹Copyright ©2009 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

理論物理学特論 aka 線形代数・演習 III プチテスト略解

樋口さぶろお² 配布: 2009-06-04 Thu 更新: Time-stamp: "2009-06-12 Fri 21:17 JST hig"

1

$$e^X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^{-2}+e^7 & -2e^{-2}+2e^7 \\ -e^{-2}+e^7 & e^{-2}+2e^7 \end{pmatrix}$$

2

$$e^X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3

$$\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

4

〈1〉 単位行列 E は ${}^tE = E = E^{-1}$ をみたすので $E \in G$.

〈2〉 $A, B \in G$ とする. ${}^t(AB) = ({}^tB)({}^tA) = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$. よって $AB \in G$.

〈3〉 $A \in G$ とする. ${}^t(A^{-1}) = {}^t({}^t(A)) = A = (A^{-1})^{-1}$. よって $A^{-1} \in G$.

よって G は行列の乗法を演算として群になっている.

5

〈1〉 単位行列 $E \in G$.

〈2〉 $R^2 = E$ と, $s_i = \pm 1$ に対して $s_1s_2 = \pm 1$ に注意して, $(s_1E)(s_2E) = (s_1s_2)E \in G, (s_1E)(s_2R) = (s_1R)(s_2E) = (s_1s_2)R \in G, (s_1R)(s_2R) = (s_1s_2)E \in G$ より, $A, B \in G$ ならば $AB \in G$. ふうつうに 4×4 の乗積表を作って確かめてもよい.

〈3〉 $(s_1E)^{-1} = s_1E \in G, (s_1R)^{-1} = s_1R \in G$ より, $A \in G$ ならば $A^{-1} \in G$.

よって G は行列の乗法を演算として群になっている.



<http://hig3.net>

²Copyright ©2005-2007 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

hig@math.ryukoku.ac.jp, <http://hig3.net>(講義のページもここからたどれます), へや:1号館5階502.