結合確率分布

樋口さぶろお

龍谷大学大学院理工学研究科数理情報学専攻

理論物理学特論　L02(2014-04-18 Fri)

今日の目標

1.
2. 結合確率分布の意味が説明できる
3. 結合確率分布から周辺分布が求められる
4. 結合確率分布が与えられたとき, 2 つの変数が独立かどうか判定できる

http://hig3.net

L01-S2

Quiz 解答:幾何分布

$p = 0.01$ とおく.

1. $p(x) = (1-p)^x p.$
2. $\mathrm{E}(1) = \sum_{x=0}^{\infty} p_x = (1-p)^x p = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$
3. $0 < 1-p < 1$ より $x = 0.$
4. 無限等比級数の公式 $\sum_{x=0}^{\infty} r^x = \frac{1}{1-r}$ の両辺を r で微分して,

$$\sum_{x=0}^{\infty} x r^{x-1} = \frac{1}{(1-r)^2}.$$

ここで, $r = 1-p$ とすると,

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x(1-p)^x p = \frac{p(1-p)}{(1-(1-p))^2} = \frac{1-p}{p}.$$

L01-Q3

Quiz 解答:連続分布

1. $\mathrm{E}(X)$ が値を持つ (広義積分が収束する) には, $\alpha > 0$ が必要. このとき,
$$\mathrm{E}(X) = \int_1^\infty A x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{-\alpha+1}\left[x^{-\alpha+1}\right]_1^\infty$$
ここでさらに, $\alpha > 1$ が必要であることがわかる. このとき,
$$\mathrm{E}(X) = \frac{A}{-\alpha+1}(0-1) = \frac{A}{\alpha-1}$$
よって, $\alpha > 1, A = \alpha - 1$.
2. $\alpha = 2$ のとき,
$$\mathrm{E}(X) = \int_1^\infty x \cdot (2-1) x^{-2}\,\mathrm{d}x$$
となるが, これは収束しない.

L01-S3
Quiz 解答:連続分布

1. $\mathrm{E}(X)$ が値を持つ (広義積分が収束する) には, $\alpha > 0$ が必要. このとき,
$$\mathrm{E}(X) = \int_1^\infty A x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{A}{-\alpha+1}\left[x^{-\alpha+1}\right]_1^\infty$$
ここでさらに, $\alpha > 1$ が必要であることがわかる. このとき,
$$\mathrm{E}(X) = \frac{A}{-\alpha+1}(0-1) = \frac{A}{\alpha-1}$$
よって, $\alpha > 1, A = \alpha - 1$.
2. $\alpha = 2$ のとき,
$$\mathrm{E}(X) = \int_1^\infty x \cdot (2-1)x^{-2}\,\mathrm{d}x$$
となるが, これは収束しない.

L02-Q1

Quiz(期待値)

確率密度関数

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1) \\ \frac{1}{4} & (2 \leq x < 3, 2 \leq y < 4) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

に従う確率変数の組 (X,Y) を考える. 期待値 $\mathrm{E}(X+2Y)$ を求めよう.

L02-Q2

Quiz(周辺分布)

確率密度関数

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (0 \le x < 1, 0 \le y < 1) \\ \frac{1}{4} & (2 \le x < 3, 2 \le y < 4) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

に従う確率変数の組 (X,Y) を考える.
X の周辺分布の確率密度関数 $p_X(x)$, Y の周辺分布の確率密度関数 $p_Y(y)$ を求めよう

L02-Q3

Quiz(周辺分布)

確率密度関数

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{13}\frac{x^2}{y^2} & (1 \le x < 3, 2 \le y < 4) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

に従う確率変数の組 (X,Y) を考える.
X の周辺分布の確率密度関数 $p_X(x)$ を求めよう