

# マルコフ連鎖 (2)

樋口さぶろお

龍谷大学大学院理工学研究科数理情報学専攻

理論物理学特論 L08(2014-06-06 Fri)

## 今日の目標

- 遷移行列が与えられたときに、時間発展が計算できる
- 定常状態の存在, 一意性を判定できる



<http://hig3.net>

## L07-S1

## Quiz 解答:マルコフ過程

$$T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \ddots & 0 & 1 & 0 & \\ \ddots & 2 & 0 & 1 & \ddots \\ & 0 & 2 & 0 & \ddots \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T^2 \mathbf{p}(0) = T^2 \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

$$T^2 \mathbf{p}(0) = T^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- $T\mathbf{p} = \mathbf{p}$  の解であるような確率ベクトルとして

$$\mathbf{p} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がある.

## L08-Q1

## Quiz(マルコフ過程)

次の遷移行列に従う  $x = 1, 2, 3$  の3状態からなるマルコフ連鎖を考えよう.

$$T_1(x|x') = T_{xx'} = \begin{array}{c|ccc} x \backslash x' & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & \frac{7}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{30} \\ 2 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 3 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{23}{30} \end{array}$$

- ① 定常分布をひとつ求めよう.
- ② 上の場合に, 自作のプログラムで直接に計算することにより,  $P(x, t)$  を求めよう. 横軸  $t$ , 縦軸  $P(x, t)$  で時間変化をグラフに描こう.
- ③  $P(1, 0) = P(2, 0) = P(3, 0) = \frac{1}{3}$  のとき,  $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} P(1, t) \\ P(2, t) \\ P(3, t) \end{pmatrix}$  を求めよう. 極限  $t \rightarrow \infty$  で定常分布に近づく?

## L08-Q2

## Quiz(マルコフ過程)

次の遷移行列に従う  $x = 1, 2$  の 2 状態からなるマルコフ連鎖を考えよう.

$$T_1(x|x') = T_{xx'} = \begin{array}{c|cc} x \backslash x' & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}$$

- ① 定常分布を求めよう.
- ② 初期条件が  $P(1, 0) = \frac{1}{2} + q$ ,  $P(2, 0) = \frac{1}{2} - q$  で与えられるとき,  $P(x, t)$  を求めよう.

## L08-Q3

## Quiz(マルコフ過程の定常状態)

- ① 定常状態が複数あるようなマルコフ連鎖の遷移行列の例を作ろう. 状態数は自由.
- ② 定常状態は1個だけのマルコフ連鎖と, 定常状態に収束しない初期条件の例を作ろう. 状態数は自由.