逸脱度・AIC

樋口さぶろお

龍谷大学大学院理工学研究科数理情報学専攻

理論物理学特論 L03(2015-10-08 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2015-10-08 Thu 07:16 JST hig"

今日の目標

1. 因子変数 (カテゴリ変数) をダミー変数として線形予測子に取り込むことができる
2. AIC の定義と機能が説明できる

http://hig3.net

L02-Q1

Quiz 解答:正規分布の母数の最尤推定

$\log L(\mu, \sigma^2) = \sum_i -\frac{1}{2}(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu)^2$ に対して,
$\frac{\partial}{\partial\mu} \log L = \frac{\partial}{\partial(\sigma^2)} \log L = 0$ を考える.

1. $\mu = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad \sigma^2 = \left(\dfrac{x_1 - x_2}{2}\right)^2.$
2. $\mu = \dfrac{1}{N}(x_1 + \cdots + x_N), \quad \sigma^2 = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \dfrac{1}{N}(x_1 + \cdots + x_N))^2.$
   ($1/(N-1)$ ではない).

ここまで来たよ

1. 略解:尤度・最尤推定・一般化線形モデル・ポアソン回帰
2. 逸脱度・AIC
   - 尤度
   - 条件付き確率
   - ベイズの公式

尤度

確率分布 $p(y|\lambda)$ で, パラメタが λ であるとき, サイズ n のサンプル $y_1, y_2, \ldots, y_n$ が得られる結合確率は,

$$p(y_1, y_2, \ldots, y_n|\lambda) = \prod_{i=1}^{n} p(y_i|\lambda).$$

尤度 (likelihood)

観測された値 (=考えるサンプル) が $y_1, y_2, \ldots, y_n$ であるとき, λ の関数

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} p(y_i|\lambda)$$

を尤度という.

Quiz(ポアソン回帰)

次の応答変数 y, 説明変数 x (実数値をとるけど下では簡単のためにたまたま整数値), $d = 0, 1$ (因子変数のダミー変数) に対して, 対数リンク関数, 線形予測子 $\lambda_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 d_i$ でポアソン回帰を行う．最大化すべき対数尤度を, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ の関数として具体的に書こう．芯減ります．

y	x	d
1	1	1
3	2	0
5	2	0
8	3	1

ここまで来たよ

1. 略解:尤度・最尤推定・一般化線形モデル・ポアソン回帰
2. 逸脱度・AIC
   - 尤度
   - 条件付き確率
   - ベイズの公式

同時確率と周辺確率 (復習)

- 同時分布 $P(X=x, Y=y)$.
  - 意味 $X=x$ かつ $Y=y$
  - 性質

$$\sum_{x,y} P(X=x, Y=y) = 1 \tag{2.1}$$

.

- 周辺分布 $P(X=x), P(Y=y)$.
  - 定義

$$P(X=x) = \sum_{y} P(X=x, Y=y), \tag{2.2}$$

$$P(Y=y) = \sum_{x} P(X=x, Y=y) \tag{2.3}$$

.

  - 意味 Y は問わず $X=x$, X は問わず $Y=y$.
  - 性質

$$\sum_{x} P(X=x) = 1, \qquad \sum_{y} P(Y=y) = 1 \tag{2.4}$$

条件付き確率 $P(X = x|Y = y)$, $P(Y = y|X = x)$

- 定義 (同時確率と周辺確率の比)

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}, \tag{2.5}$$

$$P(Y = y|X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}. \tag{2.6}$$

- 意味　条件 $Y = y$ のもとで $X = x$, 条件 $X = x$ のもとで $Y = y$.
- 性質 1 $\sum_x P(X = x|Y = y) = 1, \sum_y P(Y = y|X = x) = 1$.
- 性質 1' $\sum_y P(X = x|Y = y) \neq 1, \sum_x P(Y = y|X = x) \neq 1$.
- 性質 2 定義を通分して, 両辺に $\sum_y$ すると,

$$P(X = x|Y = y)P(Y = y) = P(X = x, Y = y) \tag{2.7}$$

$$P(X = x) = \sum_y P(X = x|Y = y)P(Y = y) \tag{2.8}$$

L03-Q2

Quiz(条件付き分布)

2 次元の離散型確率変数 (X, Y) を考える．同時分布
$P(X = x, Y = y) = f_{\mathrm{XY}}(x, y)$ は次の表で与えられる．

$y \backslash x$	2	3
3	$2/12$	$1/12$
7	$5/12$	$4/12$

1. 周辺分布 $P(X = x), P(Y = y)$ を求めよう．
2. 条件付き分布 $P(X = x|Y = 3), P(Y = y|X = 3)$ を求めよう．

ここまで来たよ

1. 略解:尤度・最尤推定・一般化線形モデル・ポアソン回帰

2. 逸脱度・AIC
    - 尤度
    - 条件付き確率
    - ベイズの公式

ベイズの公式

$$P(X=x|Y=y)=\frac{P(Y=y|X=x)P(X=x)}{\sum_x P(Y=y|X=x)P(X=x)}. \tag{2.9}$$

$$P(Y=y|X=x)=\frac{P(X=x|Y=y)P(Y=y)}{\sum_y P(X=x|Y=y)P(Y=y)}. \tag{2.10}$$

$P(X=x|Y=y)$ を $P(Y=y|X=x)$ で書き表す式, およびその逆の式.

L03-Q3

Quiz(ベイズの公式)

確率変数 X は値 $x = 1, 2$, 確率変数 Y は値 $y = 10, 20$ をとり,

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{3}{4} & (x = 1) \\ \frac{1}{4} & (x = 2), \end{cases}$$

$$P(Y = y|X = 1) = \begin{cases} \frac{7}{10} & (y = 10) \\ \frac{3}{10} & (y = 20), \end{cases}$$

$$P(Y = y|X = 2) = \begin{cases} \frac{2}{5} & (y = 10) \\ \frac{3}{5} & (y = 20). \end{cases}$$

1. 同時確率を求めて表に書こう.
2. $P(X = x|Y = 10)$ を求めよう.

ベイズ的な考え方

$\boxed{\text{事後確率 } P(X=x|Y=y)}$ $\longleftarrow$ $\boxed{\text{事前確率 } P(X=x)}$

$\uparrow$

$\boxed{\text{情報 } Y=y}$

主観確率

ベイズの定理=ベイズの公式 (+ニュアンス?)

L03-Q4

Quiz(ベイズの公式)

外見で区別できない, 品種 1(甘い) と品種 2(渋い) の柿がかごに入っている.
品種 1 は, 確率 0.95 で赤に, 確率 0.05 で黄色になる.
品種 2 は, 確率 0.125 で赤に, 確率 0.875 で黄色になる.
確率変数 X, Y を用いて, 品種 1(甘い) を $X = 1$, 品種 2(渋い) を $X = 2$, 赤いを $Y = 10$, 黄色いを $Y = 20$ と表現する.

1. 問題文から $P(Y = y|X = x)$ を読み取ろう.
2. かごの柿の $1/5$ が甘い柿であるとする. いま, 無作為に 1 個の柿を取りだしたところ, 赤い柿だった. ベイズの公式を使って, 取り出した赤い柿が甘い確率 $P(X = 1|Y = 10)$ を求めよう.
3. 仮にかごの柿の $1/5$ が渋い柿であるとする. いま, 無作為に 1 個の柿を取りだしたところ, 黄色い柿だった. ベイズの公式を使って, 取り出した黄色い柿が渋い確率を求めよう.

連絡

連絡

- オフィスアワー月 4 木 6(1-502)