ローカルサーチと MCMC

樋口さぶろお

龍谷大学大学院理工学研究科数理情報学専攻

理論物理学特論 L10(2015-12-10 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2015-12-15 Tue 19:31 JST hig"

今日の目標

1. Local search のアルゴリズムを説明できる
2. Metropolis 法による MCMC の アルゴリズムを説明できる
3. Bayes の公式が説明できる

http://hig3.net

L09-Q1

Quiz 解答:一般化線型混合モデル (2 項分布・対数リンク・正規分布)

$$
\begin{aligned}
p(y=1|\beta_1, s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} q^1 (1-q)^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2s^2}}\, \mathrm{d}r \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-(\beta_1+r)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2s^2}}\, \mathrm{d}r, \\
p(y=0|\beta_1, s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{+(\beta_1+r)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2s^2}}\, \mathrm{d}r.
\end{aligned}
$$

$\beta_1 = 0$ のとき, もちろん $p(y=1|0,s) = p(y=0|0,s) = \frac{1}{2}$ となる.

ここまで来たよ

1. 略解:一般化線型混合モデル
2. ローカルサーチと MCMC
   - 条件付き確率
   - ベイズの公式

同時確率と周辺確率 (復習)

- 同時分布 $P(X=x, Y=y)$.
  - 意味 $X=x$ かつ $Y=y$
  - 性質

$$\sum_{x,y} P(X=x, Y=y) = 1$$

.

- 周辺分布 $P(X=x), P(Y=y)$.
  - 定義

$$P(X=x) = \sum_{y} P(X=x, Y=y),$$
$$P(Y=y) = \sum_{x} P(X=x, Y=y)$$

.

  - 意味 Y は問わず $X=x$, X は問わず $Y=y$.
  - 性質

$$\sum_{x} P(X=x) = 1, \qquad \sum_{y} P(Y=y) = 1$$

条件付き確率 $P(X=x|Y=y)$, $P(Y=y|X=x)$

- 定義 (同時確率と周辺確率の比)

$$P(X=x|Y=y) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)},$$
$$P(Y=y|X=x) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(X=x)}.$$

- 意味　条件 $Y=y$ のもとで $X=x$, 条件 $X=x$ のもとで $Y=y$.
- 性質 1 $\sum_x P(X=x|Y=y)=1, \sum_y P(Y=y|X=x)=1$.
- 性質 1' $\sum_y P(X=x|Y=y)\neq 1, \sum_x P(Y=y|X=x)\neq 1$.
- 性質 2 定義を通分して, 両辺に $\sum_y$ すると,

$$P(X=x|Y=y)P(Y=y) = P(X=x,Y=y)$$
$$P(X=x) = \sum_y P(X=x|Y=y)P(Y=y)$$

L10-Q1

Quiz(条件付き分布)

2 次元の離散型確率変数 (X,Y) を考える．同時分布 $P(X=x,Y=y)=f_{\mathrm{XY}}(x,y)$ は次の表で与えられる．

$y\backslash x$	2	3
3	2/12	1/12
7	5/12	4/12

1. 周辺分布 $P(X=x), P(Y=y)$ を求めよう．
2. 条件付き分布 $P(X=x|Y=3), P(Y=y|X=3)$ を求めよう．

ここまで来たよ

1. 略解:一般化線型混合モデル
2. ローカルサーチと MCMC
   - 条件付き確率
   - ベイズの公式

ベイズの公式

$$P(X=x|Y=y)=\frac{P(Y=y|X=x)P(X=x)}{\sum_x P(Y=y|X=x)P(X=x)}.$$

$$P(Y=y|X=x)=\frac{P(X=x|Y=y)P(Y=y)}{\sum_y P(X=x|Y=y)P(Y=y)}.$$

$P(X=x|Y=y)$ を $P(Y=y|X=x)$ で書き表す式, およびその逆の式.

L10-Q2

Quiz(ベイズの公式)

確率変数 X は値 $x = 1, 2$, 確率変数 Y は値 $y = 10, 20$ をとり,

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{3}{4} & (x = 1) \\ \frac{1}{4} & (x = 2), \end{cases}$$

$$P(Y = y | X = 1) = \begin{cases} \frac{7}{10} & (y = 10) \\ \frac{3}{10} & (y = 20), \end{cases}$$

$$P(Y = y | X = 2) = \begin{cases} \frac{2}{5} & (y = 10) \\ \frac{3}{5} & (y = 20). \end{cases}$$

1. 同時確率を求めて表に書こう.
2. $P(X = x | Y = 10)$ を求めよう.

ベイズ的な考え方

$$\boxed{\text{事後確率 } P(X=x|Y=y)} \quad \longleftarrow \quad \boxed{\text{事前確率 } P(X=x)}$$

$$\uparrow$$

$$\boxed{\text{情報 } Y=y}$$

主観確率

ベイズの定理=ベイズの公式 (+ニュアンス?)

L10-Q3

Quiz(ベイズの公式)

確率変数 X は値 $x = 1, 2$, 確率変数 Y は値 $y = 10, 20$ をとり,

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{3}{4} & (x = 1) \\ \frac{1}{4} & (x = 2), \end{cases}$$

$$P(Y = y | X = 1) = \begin{cases} \frac{7}{10} & (y = 10) \\ \frac{3}{10} & (y = 20), \end{cases}$$

$$P(Y = y | X = 2) = \begin{cases} \frac{2}{5} & (y = 10) \\ \frac{3}{5} & (y = 20). \end{cases}$$

1. 同時確率を求めて表に書こう.
2. $P(X = x | Y = 10)$ を求めよう.

L10-Q4

Quiz(ベイズの公式)

外見で区別できない, 品種 1(甘い) と品種 2(渋い) の柿がかごに入っている.
品種 1 は, 確率 0.95 で赤に, 確率 0.05 で黄色になる.
品種 2 は, 確率 0.125 で赤に, 確率 0.875 で黄色になる.
確率変数 X, Y を用いて, 品種 1(甘い) を $X = 1$, 品種 2(渋い) を $X = 2$, 赤いを $Y = 10$, 黄色いを $Y = 20$ と表現する.

1. 問題文から $P(Y = y|X = x)$ を読み取ろう.
2. かごの柿の $1/5$ が甘い柿であるとする. いま, 無作為に 1 個の柿を取りだしたところ, 赤い柿だった. ベイズの公式を使って, 取り出した赤い柿が甘い確率 $P(X = 1|Y = 10)$ を求めよう.
3. 仮にかごの柿の $1/5$ が渋い柿であるとする. いま, 無作為に 1 個の柿を取りだしたところ, 黄色い柿だった. ベイズの公式を使って, 取り出した黄色い柿が渋い確率を求めよう.