一般化線形モデルの階層ベイズモデル

樋口さぶろお

龍谷大学大学院理工学研究科数理情報学専攻

理論物理学特論 L11(2016-12-14 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2016-12-13 Tue 17:35 JST hig"

今日の目標

1. 階層ベイズモデルが説明できる

http://hig3.net

ここまで来たよ

1. 略解:一般化線形モデルのベイズモデル
   - 略解
2. 一般化線形モデルの階層ベイズモデル

L10-Q1
Quiz 解答:条件付き分布

1.

$$P(X=x)=\begin{cases}\frac{7}{12} & (x=2)\\ \frac{5}{12} & (x=3)\\ 0 & (\text{他})\end{cases},\quad P(Y=y)=\begin{cases}\frac{3}{12} & (y=3)\\ \frac{9}{12} & (y=7)\\ 0 & (\text{他})\end{cases}$$

2.

$$P(X=x|Y=3)=\begin{cases}\frac{2}{3} & (x=2)\\ \frac{1}{3} & (x=3)\\ 0 & (\text{他})\end{cases}$$

$$P(Y=y|X=3)=\begin{cases}\frac{1}{5} & (y=3)\\ \frac{4}{5} & (y=7)\\ 0 & (\text{他})\end{cases}$$

L11-Q2
Quiz 解答:ベイズの公式

1.

$y \backslash x$	1	2
10	21/40	4/40
20	9/40	6/40

2.

$$P(X = x|Y = 10) = \begin{cases} \frac{21}{25} & (x = 1) \\ \frac{4}{25} & (x = 2) \end{cases}$$

L11-Q3
Quiz 解答:ベイズの公式

1.

$$P(Y=y|X=1)=\begin{cases}0.95 & (y=10)\\ 0.05 & (y=20)\end{cases}$$

$$P(Y=y|X=2)=\begin{cases}0.125 & (y=10)\\ 0.875 & (y=20)\end{cases}$$

2.

$y \backslash x$	1	2
10	0.19	0.10
20	0.01	0.70

$$P(X=1|Y=10)=\frac{P(Y=10|X=1)P(X=1)}{\sum_x P(Y=10|X=x)P(X=x)}$$

$$=\frac{0.95\times 0.2}{0.95\times 0.2+0.125\times 0.8}=\frac{19}{29}.$$

3

$$
\begin{aligned}
P(X=2|Y=20) &= \frac{P(Y=20|X=2)P(X=2)}{\sum_x P(Y=20|X=x)P(X=x)} \\
&= \frac{0.875 \times 0.2}{0.05 \times 0.8 + 0.875 \times 0.2} = \frac{35}{43}.
\end{aligned}
$$

ベイズ的な考え方

$\boxed{\text{事後確率 } P(X = x|Y = y)} \quad \longleftarrow \quad \boxed{\text{事前確率 } P(X = x)}$

$\uparrow$

$\boxed{\text{情報 } Y = y}$

主観確率

ベイズの定理=ベイズの公式 (+ニュアンス?)

L11-Q1

Quiz(ベイズ推定)

抽選用の袋に何個かの色つきボールが入っている．ボールを割ると，中に当たり外れの記された紙が入っている．
当たりのボールのうち赤いボールが $\frac{1}{10}$，白いボールが $\frac{9}{10}$ である．
外れのボールのうち赤いボールが $\frac{7}{10}$，白いボールが $\frac{3}{10}$ である．
最初に，色は気にせず当たり外れだけ考えると，当たりの確率は $\frac{2}{10}$ くらいかなと思っていた (事前確率).
無作為にボールを取り出したところ，赤いボールだった．このとき，外れである確率 (事後確率) はどれだけと思えるかを答えよう．
過程として同時確率の表を書くのを歓迎します．

L11-Q2

Quiz(正規分布の母平均値のベイズ推定)

確率変数 Y は, 正規分布にしたがう. すなわち,

$$p(y|q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(y-q)^2}{2\sigma^2}}$$

母平均値 q のベイズ推定を考える.
事前分布を

$$p(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} \mathrm{e}^{-\frac{q^2}{2s^2}}$$

とする.

1. Y のサイズ 1 の標本として, y が得られたとき, q の事後分布を求めよう. q の母平均値, 母分散を求めよう.
2. Y のサイズ 2 の標本として, y_1, y_2 が得られたとき, q の事後分布を求めよう. q の母平均値, 母分散を求めよう.

L11-Q3

Quiz(2 項分布の母平均値のベイズ推定)

確率変数 Y は, 2 項分布にしたがう. すなわち,

$$p(y|q) = \binom{N}{y} q^y (1-q)^{N-y}.$$

パラメタ q のベイズ推定を考える.
事前分布をベータ分布

$$p(q) = \frac{1}{B(a,b)} q^{a-1}(1-q)^{b-1}.$$

とする. ただし,

$$B(a,b) = \int_0^1 q^{a-1}(1-q)^{b-1}\,\mathrm{d}q = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!}.$$

1. Y のサイズ 1 の標本として, y が得られたとき, q の事後分布を求めよう.

L11-Q4

Quiz(ポアソン分布の母平均値のベイズ推定)

確率変数 Y は, ポアソン分布にしたがう. すなわち,

$$p(y|\lambda) = \frac{\lambda^y}{y!}\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

パラメタ λ のベイズ推定を考える.
事前分布をガンマ分布

$$p(\lambda|\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta\lambda}$$

とする. ただし,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

である.

1. Y のサイズ 1 の標本として, y が得られたとき, q の事後分布を求めよう.