ベイズ推定のための MCMC

樋口さぶろお

龍谷大学大学院理工学研究科数理情報学専攻

理論物理学特論　L13(2016-12-21 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2016-12-21 Wed 11:38 JST hig"

今日の目標

1. MCMC でベイズ推定の事後分布からサンプルできる

http://hig3.net

ここまで来たよ

1. 略解:一般化線形モデルの階層ベイズモデル
   - 略解
2. ベイズ推定のための MCMC

L12-Q1

Quiz 解答:ベイズ推定

Y を色, X を当落とすると,

$$\begin{aligned}&P(X=\text{落}\,|Y=\text{赤})\\ =&\frac{P(Y=\text{赤}\,|X=\text{当})P(X=\text{当})}{P(Y=\text{赤}\,|X=\text{当})P(X=\text{当})+P(Y=\text{赤}\,|X=\text{落})P(X=\text{落})}\\ =&\frac{\frac{7}{10}\frac{8}{10}}{\frac{1}{10}\frac{2}{10}+\frac{7}{10}\frac{8}{10}}=\frac{28}{29}.\end{aligned}$$

$Y \backslash X$	当	落
赤	$\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{10}$	$\frac{7}{10}\cdot\frac{8}{10}$
白	$\frac{9}{10}\cdot\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}\cdot\frac{8}{10}$
合計	$\frac{2}{10}$	$\frac{8}{10}$

L12-Q2

Quiz 解答:正規分布の母平均値のベイズ推定

1. 事後分布は,
$$p(q|y) = C_0(y)\mathrm{e}^{-\frac{(y-q)^2}{2\sigma^2}} \times \mathrm{e}^{-\frac{q^2}{2s^2}}.$$
ここで, $C_0(y)$ は y に依存する規格化定数.
$(a^2)^{-1} = (\sigma^2)^{-1} + (s^2)^{-1}$ とおくと,
$$\begin{aligned} p(q|y) =& C_1(y)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{s^2})q^2-\frac{2y}{\sigma^2}q]} \\ =& C_2(y)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{1}{a^2}(q-\frac{a^2}{\sigma^2}\cdot y)^2} \end{aligned}$$
よって, 母平均値 $\frac{a^2}{\sigma^2}\cdot y$, 母分散 $a^2(< s^2)$ の正規分布で, 規格化定数は $C_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}}$.
2. $(b^2)^{-1} = 2(\sigma^2)^{-1} + (s^2)^{-1}$ とおくと, 母平均値 $\frac{b^2}{\sigma^2}\cdot y$, 母分散 b^2 の正規分布.

ローカルサーチ

尤度 $L(q)$ 最大の q を見つけたい.

```
double L(double q);

e=0.01; /* 小さなジャンプ幅 */
q=q0; /* 適当な初期値 */
while(1){
  q1=q+e * (+1);  or (-1) with 乱数
  if(L(q1)>L(q)){
    q=q1;
  }
}
```

欠点

-
-
-

Markov Chain Monte Carlo

尤度 $L(q)$ 最大の q を見つけたい.

```
double L(double q);

e=0.01; /* 小さなジャンプ幅 */
q=q0; /* 適当な初期値 */
while(1){
  q1=q+e * (+1);  or (-1) with 乱数
  if(L(q1)>L(q)){
    q=q1;
  } else {
    q=q1;  /* 「確率 L(q1)/L(q)」で */
  }
}
```

確率 $\min(1, \frac{L(q1)}{L(q)})$ で q=q1.

欠点

-

確率過程

$p(q,t)$ 上の計算過程で, t-th iteration で q である確率.
時間発展の式

$$
\begin{aligned}
p(q,t+1) =& p(q,t) \\
& - p(q,t)\min\left(\frac{L(q-e)}{L(q)}, 1\right) \\
& - p(q,t)\min\left(\frac{L(q+e)}{L(q)}, 1\right) \\
& + p(q+e,t)\min\left(\frac{L(q)}{L(q+e)}, 1\right) \\
& + p(q-e,t)\min\left(\frac{L(q)}{L(q-e)}, 1\right)
\end{aligned}
$$

定常分布のうちのひとつ

$$p(q,t) = \frac{1}{Z} \times L(q),$$

すなわち事後分布が実現される可能性がある.

サンプルプログラムとデータは
`https://learn.math.ryukoku.ac.jp/moodle` 参照.
L12-Q1

Quiz(正規分布の母数のベイズ推定)

未知の母標準偏差 $\theta = \sigma$ の正規分布

$$p(y|\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

からサイズ N の標本 $\{y_1, \ldots, y_N\}$ を得た.
事後分布 $p(\sigma|y)$ から MCMC で σ をサンプルし, ヒストグラムを描こう.

1. 事前分布を無情報とする.
2. 事前分布を $p(\sigma) \propto 1/\sigma$ とする.
3. 事前分布を $p(\sigma) = \frac{1}{3} \times \mathbf{1}_{[0 \leq \sigma < 3]}(\sigma)$ とする.

L12-Q2

Quiz(指数分布の母数の母数のベイズ推定)

未知の母平均値 $1/\theta = 1/a$ の指数分布 $(0 < a)$

$$p(y|a) = a\mathrm{e}^{-ay}$$

からサイズ N の標本 $\{y_1, \ldots, y_N\}$ を得た.
事後分布 $p(a|y)$ から MCMC で a をサンプルし, ヒストグラムを描こう.

1. 事前分布を無情報とする.
2. 事前分布を $p(a) \propto 1/a$ とする.
3. 事前分布を $p(a) = \frac{1}{3} \times \mathbf{1}_{[1 \le a \le 4]}(a)$ とする.

L12-Q3

Quiz(分布の母数の最尤推定)

未知のパラメタ $0 < b < 1$ をもつ確率分布

$$p(y|b) = \frac{b}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(y-1)^2}{2}} + \frac{1-b}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(y+1)^2}{2}}$$

からサイズ N の標本 $\{y_1, \ldots, y_N\}$ を得た.
事後分布 $p(b|y)$ から MCMC で b をサンプルし, ヒストグラムを描こう.

1. 事前分布を無情報とする.
2. 事前分布を $p(b) = 2b^2$ とする.
3. 事前分布を $p(b) = 2 \times \mathbf{1}_{[\frac{1}{4} \le b \le \frac{3}{4}]}(b)$ とする.

L12-Q4

Quiz(分布の母数の最尤推定)

未知の母数 $c > 0$ をもつ確率分布

$$p(y|c) = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(y-c)^2}{2}} + \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(y+c)^2}{2}}$$

からサイズ N の標本 $\{y_1, \ldots, y_N\}$ を得た.
事後分布 $p(c|y)$ から MCMC で c をサンプルし, ヒストグラムを描こう.

1. 事前分布を無情報とする.
2. 事前分布を $p(c) = \mathrm{e}^{-c}$ とする.
3. 事前分布を $p(c) = \frac{1}{2} \times \mathbf{1}_{[0 \leq c \leq 2]}(c)$ とする.