



## 2

次の命題が真か偽か答えよう。この問では、一定の数以上正解しないと得点が得られません。

- $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} (x < y) \cdots$  17
- $\exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N} (x < y) \cdots$  18
- $\forall x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} (x > y) \cdots$  19
- $\exists y \in \mathbb{N} \exists x \in \mathbb{N} (x > y) \cdots$  20
- $(\exists y \in \mathbb{N} y^2 < 0) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{N} x = 2008). \cdots$  21
- 集合  $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x^5 + 3x^3 + 1 \geq 0\}$  に対して  $-1 \in X \cdots$  22
- 集合  $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x^5 + 3x^3 + 1 \geq 0\}$  に対して  $0 \in X \cdots$  23
- $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}, Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \geq 1\}$  のとき,  $X \subset Y \cdots$  24
- 任意の集合  $X, Y$  について,  $X \subset Y, X \neq Y$  であるなら  $X$  の濃度は  $Y$  の濃度より小さい.  $\cdots$  25
- 任意の集合  $X, Y$  に対して, 補集合を  $X^c$  で表すと  $(X \cap Y)^c = X^c \cap Y^c$  である.  $\cdots$  26

17 — 26 の選択肢

- ① 真      ② 偽

## 3

次の写像  $f: X \rightarrow Y$  が全射か単射か答えよう。

- $X = \mathbb{R}, Y = [-1, 1], f(x) = \cos x. \cdots$  27
- $X = \mathbb{Z}, Y = \mathbb{Z}, f(x) = 2x^3. \cdots$  28
- $X = \mathbb{R}^2, Y = \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (-x_2, x_1). \cdots$  29

27 — 29 の選択肢

- ① 全射でも単射でもない。  
② 全射だが単射ではない。  
③ 単射だが全射ではない。  
④ 全単射である。

## 4

答を選択肢から選ぼう。または  にあてはまるものを選択肢から選ぼう。

### 4.1

集合  $X = \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < +1\}$  の濃度は? ...

の選択肢

- ① 0      ② 1      ③ 2      ④  $\aleph_0$       ⑤  $\aleph$

### 4.2

集合  $X = \{(x, x^2) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$  の濃度は? ...

の選択肢

- ① 0      ② 1      ③ 2      ④  $\aleph_0$       ⑤  $\aleph$

### 4.3

写像  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x_1, x_2) = (x_1 - 3x_2, 9x_2 - 3x_1)$  について,  $Y_1 = \{(0, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$  の逆像  $f^{-1}(Y_1)$  を求めよう. ...

の選択肢

- ①  $\{(0, 0)\}$       ②  $\{(1, 3)t \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$       ③  $\{(1, -3)t \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$   
④  $\{(3, 1)t \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$       ⑤  $\{(3, -1)t \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$       ⑥  $\mathbb{R}^2$

### 4.4

写像  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x_1, x_2) = (x_1 - 3x_2, 9x_2 - 3x_1)$  について,  $X_1 = \{(1, 3)t \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$  の像  $f(X_1)$  を求めよう. ...

の選択肢

- ①  $\{(0, 0)\}$       ②  $\{(1, 3)t \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$       ③  $\{(1, -3)t \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$   
④  $\{(3, 1)t \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$       ⑤  $\{(3, -1)t \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$       ⑥  $\mathbb{R}^2$

#### 4.5

$P, Q$  を命題とするとき,  $P \Rightarrow Q$  も命題である.  $P \Rightarrow Q$  の **34** は  $\neg Q \Rightarrow \neg P$  である.

**34** の選択肢

- ① 逆      ② 裏      ③ 対偶      ④ 仮定      ⑤ 結論      ⑥ 黒幕

#### 4.6

整数全体を表す記号は **35** である.

**35** の選択肢

- ①  $\mathbb{N}$       ②  $\mathbb{Z}$       ③  $\mathbb{Q}$       ④  $\mathbb{R}$       ⑤  $\mathbb{C}$       ⑥  $\heartsuit$

#### 4.7

集合  $X = \{-2, 0, 1\}$  に対して,  $X$  の巾集合  $2^X$  とは **36** である.

**36** の選択肢

- ①  $\{\frac{1}{4}, 1, 2\}$   
②  $\{-2, 0, 1\}$   
③  $\{\{-2, 0, 1\}\}$   
④  $\{0, 1\}$   
⑤  $\{\emptyset, \{-2\}, \{0\}, \{1\}, \{-2, 0\}, \{0, 1\}, \{-2, 1\}, \{-2, 0, 1\}\}$   
⑥  $\{\text{アデリーペンギン, エンペラーペンギン, フンボルトペンギン}\}$

#### 4.8

写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2e^{3x+\frac{1}{7}} - 1$  の逆写像は  $f^{-1}(y) =$  **37** である.

**37** の選択肢

- ①  $\frac{1}{2}e^{3y+\frac{1}{7}} + \frac{1}{2}$       ②  $2e^{\frac{1}{3}(y-\frac{1}{7})} - 1$       ③  $\frac{1}{3}\log(\frac{y+1}{2} - \frac{1}{7})$   
④  $2\log(3y + \frac{1}{7}) - 1$       ⑤  $2008y^2 + 1y + 16$       ⑥  $\frac{1}{3}(\log \frac{y+1}{2} - \frac{1}{7})$

ごめんなさい.

出題時には正しい選択肢がありませんでした.

## 集合 位相 + 演習プチテストリベンジ略解

樋口さぶろお<sup>2</sup> 配布: 2008-01-16 Tue 更新: 2008-01-19 13:33JST

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
①	⑤	⑧	②	③	④	⑥	④	①	③	⑨	④	①	③	④	②	①
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
②	②	②	①	②	①	①	②	②	②	③	④	⑤	④	④	③	③
35	36	37														
②	⑤	⑥														

### 1

- $[0, +4]$ .
- $(-1, +1)$ .
- 2次方程式  $y^2 - (x+2) = 0$  に実数解が存在する条件は, 判別式  $0^2 + 4(x+2) \geq 0$ .  
よって,  $[-2, +\infty)$ .
- 

$$\begin{aligned} & \neg(x \leq -1 \Rightarrow x < -2) \\ \equiv & \neg(\neg(x \leq -1) \vee (x < -2)) \Rightarrow (\text{ならば}) \text{の定義} \\ \equiv & (x \leq -1) \wedge \neg(x < -2) \quad \text{ド-モルガンの法則} \\ \equiv & (x \leq -1) \wedge (x \geq -2) \end{aligned}$$

よって  $[-2, -1]$ .

### 2

- 真.  $y = x + 1$  ととればいい.
- 偽. 最大の自然数というものはない.
- 偽. ぜんぜんへん.  $x = y$  ととると反例.
- 真. たとえば  $x = 2, y = 1$ .
- 真.  $P \Rightarrow Q \equiv (\neg P) \wedge Q$  であり,  $P$  が偽なので.
- 偽. 条件  $P(-1)$  が F.
- 真. 条件  $P(0)$  が T.
- 真.  $(x, y) \in X$  とすると,  $x^2 + y^2 = 1$ . このとき  $(x^2 + y^2)^2 = 1 \geq 1$  より,  $(x, y) \in Y$ .  
よって  $X \subset Y$ .  $X = Y$  でないのは,  $(x, y) = (2, 0) \in Y, \notin X$  からわかる.
- 偽. 反例  $X = \mathbb{N}, Y = \mathbb{Z}$ .

<sup>2</sup>Copyright ©2007 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

26. 偽. 正しくは, ド-モルガンの法則  $(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$ . 反例としては, 全体集合  $\mathbb{R}$  で,  $X = (-\infty, 0], Y = \mathbb{R}$  とすると,  $(X \cap Y)^c = X^c = (0, +\infty)$ .  $X^c \cap Y^c = (0, +\infty) \cap \emptyset = \emptyset$ .

### 3

1.  $y \in [-1, 1]$  に対して  $x = \arccos y$  ととれば  $f(x) = y$  なので全射.  $\cos 0 = \cos 2\pi$  なので単射ではない.
2.  $2x^3 = 2y^3$  のとき  $X = y$  だから単射.  $f(x) = 2$  となる  $x \in \mathbb{Z}$  はないので全射ではない.
3. これは線型写像.  $\ker f = \{(0, 0)\}$  なので単射. 単射であり  $X, Y$  の次元が同じだから全射. よって全単射.

### 4

1.  $\#[0, 1] = \aleph$  であり,  $[0, 1]$  と  $X$  の間には全単射があるので,  $\#X = \aleph$ .
2.  $\mathbb{Z} = \aleph_0$  であり,  $\mathbb{Z}$  と  $X$  の間には全単射があるので,  $\#X = \aleph_0$ .
3.  $f^{-1}(Y_1) = \ker f$  を求めて  $f^{-1}(Y_1) = \{(3, 1)t \mid t \in \mathbb{R}\}$ .
4.  $f(t, 3t) = (-8t, 24t)$ . よって  $f(X_1) = \{(1, -3)t \mid t \in \mathbb{R}\}$ .
5. 対偶
6.  $\mathbb{Z}$ .
7. 部分集合すべてからなる集合だから  $\{\emptyset, \{-2\}, \{0\}, \{1\}, \{-2, 0\}, \{0, 1\}, \{-2, 1\}, \{-2, 0, 1\}\}$ .
- 8.

$$y = 2e^{3x + \frac{1}{7}} - 1$$

$$\frac{y+1}{2} = e^{3x + \frac{1}{7}}$$

$$\log \frac{y+1}{2} = 3x + \frac{1}{7}$$

$$x = \frac{1}{3}(\log \frac{y+1}{2} - \frac{1}{7})$$