

集合 位相 + 演習

樋口さぶろお¹ 配布: 2007-11-06 Tue 更新: Time-stamp: "2007-11-30 Fri 09:34 JST hig"

7 2項関係 — 同値関係

今日の目標

1. 2項関係
2. 同値関係

7.1 2項関係

鈴木 p.26 集合 X に対して, $x_1, x_2 \in X$ を決めると真偽が定まる命題関数 $R(x_1, x_2)$ を X 上の 2項関係という.

7.1.1

次の C 言語の演算子はいずれも両側に 1 個ずつ変数を書ける. この変数を x_1, x_2 , 演算子を R とよぶと, $x_1 R x_2$ と思える. 2項関係になっているものはどれとどれ?

1. +
2. =
3. <
4. !=

7.1.2

$I = [0, 1]$ 上の次の 2項関係 $P(x_1, x_2)$ に対して, 集合 $R = \{(x_1, x_2) \in I^2 | P(x_1, x_2)\}$ を描こう.

1. $P(x_1, x_2) \equiv (|x_1 - x_2| = \frac{1}{2})$
2. $P(x_1, x_2) \equiv (x_1 x_2 = \frac{1}{2})$
3. $P(x_1, x_2) \equiv ((x_1 < \frac{1}{2} \wedge x_2 < \frac{1}{2}) \vee (x_1 \geq \frac{1}{2} \wedge x_2 \geq \frac{1}{2}))$

¹Copyright ©2007,2008 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

鈴木 p.27 集合 X 上の 2 項関係 $R(x_1, x_2)$ が同値関係であるとは, 次の 3 つの条件が成立する (真になる) こと.

どか 1 $\forall x \in X \ xRx$ (反射律)

どか 2 $\forall x_1, x_2 \in X \ (x_1Rx_2 \Rightarrow x_2Rx_1)$ (対称律)

どか 3 $\forall x_1, x_2, x_3 \in X \ ((x_1Rx_2 \wedge x_2Rx_3) \Rightarrow x_1Rx_3)$ (推移律)

7.2.1

$m \in \mathbb{N}$ とする. \mathbb{Z} 上の 2 項関係

$$x_1Rx_2 \equiv (x_1 - x_2 \text{ は } m \text{ の倍数})$$

は同値関係であることを証明しよう.

この同値関係をしばしば $x_1 \equiv x_2 \pmod{m}$ とかく (たまたま命題の同値と同じ記号になってしまったが別の意味)

7.2.2

\mathbb{R} 上の 2 項関係

$$x_1Rx_2 \equiv x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}$$

は同値関係であることを証明しよう.

7.2.3

\mathbb{R} 上の 2 項関係

$$x_1Rx_2 \equiv |x_1| = |x_2|$$

は同値関係であることを証明しよう.

7.2.4

写像 $f: X \rightarrow Y$ が与えられているとき, X 上の 2 項関係

$$x_1Rx_2 \equiv f(x_1) = f(x_2)$$

は同値関係であることを証明しよう.

7.2.5

次の2項関係はいずれも同値関係でない。どか1-どか3のどれが成立しないかを答え、成立しない条件の反例を挙げよう。

1. $X = \mathbb{R}$ としたとき $x_1 R x_2 \equiv (x_1 \times x_2 \geq 0)$
2. $X = \mathbb{R}$ としたとき $x_1 R x_2 \equiv (x_1 \times x_2 \leq 0)$
3. $X = \mathbb{R}$ としたとき $x_1 R x_2 \equiv (x_1 \times x_2 \geq 1)$
4. $X = \mathbb{R}$ としたとき $x_1 R x_2 \equiv (x_1 \times x_2 = 0)$

7.2.6

$X =$ 現在生きている滋賀県民全体の集合とするとき、同値関係になっているものはどれ?

1. $x_1 R x_2 \equiv (x_1 \text{ と } x_2 \text{ は兄弟 } \vee x_1 \text{ と } x_2 \text{ は同一人物})$
2. $x_1 R x_2 \equiv (x_1 \text{ は } x_2 \text{ の子})$
3. $x_1 R x_2 \equiv (x_1 \text{ は } x_2 \text{ と同じ年か年上})$
4. $x_1 R x_2 \equiv (x_1 \text{ と } x_2 \text{ は付き合ったことがある } \vee x_1 \text{ と } x_2 \text{ は同一人物})$

7.2.7

次は $X = \mathbb{Z}$ 上の同値関係かどうか考えよう。同値関係なら証明し、そうでなければ成立しない条件の反例を挙げよう。

1. $a R b \equiv a \geq b$
2. $a R b \equiv (a = b^2 \text{ または } b = a^2)$
3. $a R b \equiv a + b \text{ は偶数}$
4. $a R b \equiv a - b \text{ は } 0 \text{ または奇数}$

7.2.8 2007-11-13 quiz 2

集合 $X = \{-3, -2, 0, 1, 4, 8, 12\}$ 上の同値関係 $\equiv (\text{mod } 4)$ を考える。商集合を求めよう。基本領域の一例を求めよう



目次 前回 次回 今回の解答