応用ベクトル解析∇ファイナルトライアル

樋口さぶろお[1] 配布: 2005/07/26 Tue 更新: Time-stamp: ”2005/08/02 Tue 11:15 hig”

注意

1. **外部記憶ペーパー作成10分＋答案作成80分.**
2. **5問80分です．裏もあります.**
3. 出席チェックのときに学生証を見せてね.
4. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
5. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.
6. 3 次元の右手系 xyz-座標系を使っています. $\boldsymbol{r} = (x, y, z), \boldsymbol{V} = (V_x, V_y, V_z)$.
7. 各自の点数は, 生協メール (アドレス `t040nnnx@ryukoku-u.jp`) で個別にお知らせします. ここに届いたメールは, Web ページ `http://www.seikyou.ne.jp/ryukoku/` で見られます.
8. 答案は返却しません.

1

曲面 S のパラメータ表示を $\boldsymbol{r}(s,t) = (s, t, s^2 + 4t^2 - 2st)$ とする. $\boldsymbol{r}(2,1) = (2,1,4)$ における接平面の方程式, またはパラメータ表示を求めよう.

2

始点を $(2,4,8)$, 終点を $(0,0,0)$ とする曲線 C のパラメータ表示が, $\boldsymbol{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ $(0 \le t \le 2)$ で与えられている. またベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (-y, z - x, x)$ とする. 線積分

$$\int_C \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

を求めよう.

3

スカラー場 $f(\boldsymbol{r}) = \mathrm{e}^{x+2y-3z}$ とベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (xy^2, yz^2, zx^2)$ に対して次の量を計算しよう.

1. ∇f
2. $\nabla \cdot (\nabla f)$
3. $\nabla \cdot \boldsymbol{V}$
4. $\nabla \times \boldsymbol{V}$

うらにつづく

`http://hig3.net/`(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

4

曲面 S のパラメータ表示を $\boldsymbol{r}(s,t)=(t\cos s, t\sin s, 0)$ $(0\le s<2\pi, 1\le t\le 2)$ とする．ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})=(-y,x,-1)$ に対して面積分

$$\int_S (\nabla\times\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$$

を考える．ここで, S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向きは, $\boldsymbol{n}$ の z 成分が正の値を取るように選ぶ.

この面積分をストークスの定理を用いて線積分に書きかえよう．答の線積分は, 1 個の変数 u の定積分 $\int_a^b(\cdots\cdots)\mathrm{d}u$ の形に書き表そう (最後まで計算しきって答を求めてしまってもよい).

5

曲面 S のパラメータ表示を $\boldsymbol{r}(s,t)=(t\cos s, 2t\sin s, t^2)$ $(0\le s<2\pi, 0\le t\le 2)$ とする．ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})=(y,-x,z^2)$ に対して面積分

$$\int_S \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$$

を求めよう．ただし, S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向きは, $\boldsymbol{n}$ の z 成分が負の値を取るように選ぶ.

6 講義の録画に関するアンケート

これは成績に関係ありません.

$\boxed{0}$ これまでに録画を何回再生しましたか．該当するもの**ひとつ**をえらんでください.

1. 0 回. → A へ.
2. 1 回. → B へ.
3. 2-5 回. → B へ.
4. 5-10 回. → B へ.
5. 11 回以上. → B へ.

A. 0 回の人への質問

$\boxed{\text{A1}}$ 再生しなかった理由について, 該当するもの**すべて**にチェックしてください.

1. 再生方法がわからないため.
2. 授業終了時点で十分に理解できているため
3. 録画を見ても理解が深まるとは思えないため.
4. 録画を見る時間がないため.
5. その他の理由．よかったらお書きください.

B. 1 回以上の人への質問

$\boxed{\text{B1}}$ 録画は理解に役立ちましたか．該当するもの**ひとつ**にチェックしてください.

(a) 役立ったことが多い.
(b) 役立たなかったことが多い.
(c) どちらともいえない.

$\boxed{\text{B2}}$ 何を期待して録画を見ましたか．該当するもの**すべて**にチェックしてください.

(a) 出席した回のよくわからなかったところを確かめるため.
(b) 欠席した回の内容を知るため.
(c) 欠席した回の要点だけを知るため.
(d) 録画を見れば出席の必要がないため.
(e) その他の理由．よかったらお書きください.

$\boxed{\text{B3}}$ 講義の録画について, 録画方法, 提供方法などについて改善すべき点があれば書いてください.

$\boxed{\text{おしまい}}$

応用ベクトル解析∇ ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお[2]　配布: 2005/07/26 Tue 更新: Time-stamp: "2005/08/02 Tue 11:15 hig"

ご注意とお願い　この略解は注意深く作成しているつもりですが, 間違いが含まれていることがあります. 後から間違いに気づいたときは Web に訂正版を置いています. 特に次年度以降の試験勉強に利用される場合, Web から最新版を入手されることをお奨めします. `http://hig3.net` > 去年より前の授業 > 科目名

1

$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s,t) = (1,0,2s-2t)$, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(s,t) = (0,1,8t-2s)$. よって, $\boldsymbol{r}(2,1) = (2,1,4)$ において, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(2,1) = (1,0,2)$, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(2,1) = (0,1,4)$. 符号を好みで選んで,

$$\boldsymbol{n}(2,1) = +\frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(2,1) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(2,1)}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(2,1) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(2,1)\right|} = +\frac{(-2,4,1)}{|(-2,4,1)|}.$$

よって, 方程式は

$$0 = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}(2,1)) \cdot \boldsymbol{n}(2,1) = ((x,y,z) - (2,1,4)) \cdot \frac{(-2,4,1)}{|(-2,4,1)|} \tag{1}$$

すなわち $2x + 4y - z = 4$.

一方, パラメータ表示は

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}(s,t) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(2,1)s + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(2,1)t + \boldsymbol{r}(2,1) = (s+2, t+1, 2s+4t+4). \tag{2}$$

このパラメータ表示 $(x,y,z) = (s+2, t+1, 4)$ から s,t を消去しても方程式 (1) が得られる.

2

$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = (1, 2t, 3t^2)$ なので,

$$\int_C \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_2^0 \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t = \int_2^0 (-t^2, t^3 - t, t) \cdot (1, 2t, 3t^2)\,\mathrm{d}t = \cdots = -\frac{84}{5}.$$

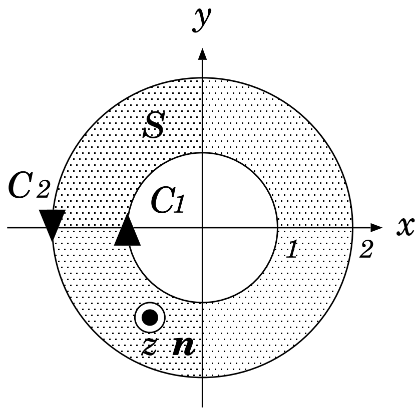
3

1. $\nabla f = (1,2,-3)\mathrm{e}^{x+2y-3z} (= (1,2,-3)f(\boldsymbol{r}))$.
2. $\nabla \cdot (\nabla f) = 14\mathrm{e}^{x+2y-3z} (= 14f(\boldsymbol{r}))$.
3. $\nabla \cdot \boldsymbol{V} = x^2 + y^2 + z^2 (= |\boldsymbol{r}|^2)$.
4. $(\nabla \times \boldsymbol{V})_x = \frac{\partial(zx^2)}{\partial y} - \frac{\partial(yz^2)}{\partial z} = 0 - 2yz$. y,z 成分は変数の入れ替えで求めることができて, $\nabla \times \boldsymbol{V} = -2(yz, zx, xy)$.

`http://hig3.net`(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

4

S は CD の形なので, 境界 ∂S は, C_1, C_2 の 2 つの部分からなる. 境界の向きは $\boldsymbol{n}$ と右ねじの法則から定まる.



C_1　パラメータ表示 $\boldsymbol{r}_1(u) = \boldsymbol{r}(u, 1) = (\cos u, \sin u, 0)$. $(0 \le u < 2\pi)$. z 軸の正の方向から見て時計回りで, 始点 $\boldsymbol{r}_1(2\pi)$, 終点 $\boldsymbol{r}_1(0)$.

C_2　パラメータ表示 $\boldsymbol{r}_2(u) = \boldsymbol{r}(u, 2) = (2\cos u, 2\sin u, 0)$. $(0 \le u < 2\pi)$. z 軸の正の方向から見て反時計回りで, 始点 $\boldsymbol{r}_2(0)$, 終点 $\boldsymbol{r}_2(2\pi)$.

ストークスの定理より,

$$\begin{aligned}
\int_S (\nabla \times \boldsymbol{V}) \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S &= \int_{\partial S} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(u)) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}u}(u)\mathrm{d}u \\
&= \int_{2\pi}^{0} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_1(u)) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}u}(u)\mathrm{d}u + \int_0^{2\pi} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_2(u)) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}u}(u)\mathrm{d}u \\
&= \int_{2\pi}^{0} (-\sin u, \cos u, -1) \cdot (-\sin u, \cos u, 0)\ \mathrm{d}u \\
&\quad + \int_0^{2\pi} (-2\sin u, 2\cos u, -1) \cdot (-2\sin u, 2\cos u, 0)\ \mathrm{d}u \\
&= \int_0^{2\pi} 3\ \mathrm{d}u = 6\pi.
\end{aligned}$$

5

$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s, t) = (-t\sin s, 2t\cos s, 0)$, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(s, t) = (\cos s, 2\sin s, +2t)$ なので,

$$\boldsymbol{n} = \pm \frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}\right|} = \pm \frac{(4t^2\cos s, 2t^2\sin s, -2t)}{|(4t^2\cos s, 2t^2\sin s, -2t)|}.$$

$t \ge 0$ なので, $(\boldsymbol{n})_z < 0$ という条件より, + 符号をとる. ヤコビアン J を求めると, いつものように $\boldsymbol{n}$ の分母の部分と等しく $|J| = |(4t^2\cos s, 2t^2\sin s, -2t)|$ となり,

$$\begin{aligned}
\int_S \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}s \int_0^2 \mathrm{d}t\ \boldsymbol{V}(t\cos s, 2t\sin s, t^2) \cdot \frac{(4t^2\cos s, 2t^2\sin s, -2t)}{|(4t^2\cos s, 2t^2\sin s, -2t)|} \cdot \left|(4t^2\cos s, 2t^2\sin s, -2t)\right| \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}s \int_0^2 \mathrm{d}t\ (5t^3\sin 2s - 2t^5) = -\frac{128}{3}\pi.
\end{aligned}$$

6

ご協力ありがとうございます.