応用ベクトル解析∇

樋口さぶろお[1] 配布: 2005/07/05 Tue 更新: Time-stamp: "2005/07/05 Tue 12:54 hig"

10 略解 – 渦度

1. $[\nabla \boldsymbol{V}] = \frac{\partial(xy+y)}{\partial x} - \frac{\partial(-xy+x)}{\partial y} = x + y.$

2. 積分路 ∂D は $C_1 : \boldsymbol{r}(t) = (t,0), (0 \le t \le 1), C_2 : \boldsymbol{r}(t) = (1-t,t), (0 \le t \le 1), C_3 : \boldsymbol{r}(t) = (0,t), (0 \le t \le 1)$ に分けられる.

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{C_1} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{C_3} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= \int_0^1 \boldsymbol{V}(t,0) \cdot (1,0)\ \mathrm{d}t + \int_0^1 \boldsymbol{V}(1-t,t) \cdot (-1,1)q\ \mathrm{d}t + \int_1^0 \boldsymbol{V}(0,t) \cdot (0,1)\ \mathrm{d}t \\ &= \cdots = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + (-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{3}.\end{aligned} \tag{1}$$

なお, $C_2 : \boldsymbol{r}(t) = (t, 1-t)$ $(0 \le t \le 1)$ というパラメータ表示でももちろんよい. この場合 $\int_{C_2} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_1^0 \boldsymbol{V}(t,1-t) \cdot (1,-1)\ \mathrm{d}t$ となる.

3. 問題で与えられたパラメータ表示をとる. 点 $\boldsymbol{r}(s,t)$ での渦度は $s+t$. ヤコビアンは $J=1$.

$$\int_D \nabla \cdot \boldsymbol{V}\ \mathrm{d}S = \int_0^1 \mathrm{d}s \int_0^{1-s} \mathrm{d}t\ (s+t) = \cdots = \tfrac{1}{3}. \tag{2}$$

グリーンの定理から, これらの値は一致する.

11 quiz – 3 次元の回転

1. $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (xy, \log(1+x^2), x+z)$ に対して, $\nabla \cdot \boldsymbol{V}$, $\nabla \times \boldsymbol{V}$ を求めよう.

2. $r = |\boldsymbol{r}|$ とする. ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (\mathrm{e}^{-r^2}, r^2 x, r^3 z)$ に対して, $\nabla \cdot \boldsymbol{V}$, $\nabla \times \boldsymbol{V}$ を求めよう (答えに r が残っていてもよい).

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

問題 7.11(p.157), 章末問題 [7.1]–[7.7](p.166)

---

http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, tel:0775437514 数理情報学科へや:1 号館 5 階 502.

お知らせ

実習室や自宅で, Web 上で講義の録画を見られます. 自宅での再生には Password が必要です.
UserID:

Password:

目次 | 前回 | 次回 | 略解

http://hig3.net

科目のページ ＋ リクエスト / 質問 / 苦情用掲示板