応用ベクトル解析∇

樋口さぶろお[1] 配布: 2005/07/12 Tue 更新: Time-stamp: "2005/07/23 Sat 19:18 hig"

前々回 (Quiz10) の略解の訂正

1.

2. 積分路 ∂D は $C_1 : \boldsymbol{r}(t) = (t, 0), (0 \le t \le 1), C_2 : \boldsymbol{r}(t) = (1-t, t), (0 \le t \le 1), C_3 : \boldsymbol{r}(t) = (0, t), (0 \le t \le 1)$ に分けられる.

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{C_1} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{C_3} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= \int_0^1 \boldsymbol{V}(t,0) \cdot (1,0)\ \mathrm{d}t + \int_0^1 \boldsymbol{V}(1-t,t) \cdot (-1,1)\ \mathrm{d}t + \int_1^0 \boldsymbol{V}(0,t) \cdot (0,1)\ \mathrm{d}t \\ &= \cdots = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + (-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{3}.\end{aligned} \tag{1}$$

なお, $C_2 : \boldsymbol{r}(t) = (t, 1-t)\ (0 \le t \le 1)$ というパラメータ表示でももちろんよい. この場合 $\int_{C_2} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_1^0 \boldsymbol{V}(t, 1-t) \cdot (1, -1)\ \mathrm{d}t$ となる.

11 略解– 3 次元の回転

1. 定義をそのまま使って,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = \frac{\partial(xy)}{\partial x} + \frac{\partial(\log(1+x^2))}{\partial y} + \frac{\partial(x+z)}{\partial z} = y + 0 + 1.$$
$$\nabla \times \boldsymbol{V} = (0-0, 0-1, \tfrac{2x}{1+x^2} - x) = (0, -1, \tfrac{x(1-x^2)}{1+x^2}).$$

2. $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ などに注意して,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = -2r\mathrm{e}^{-r^2}\tfrac{x}{r} + 2r\tfrac{y}{r}x + (3r^2\tfrac{z}{r}z + r^3) = -2x\mathrm{e}^{-r^2} + 2xy + 3rz^2 + r^3.$$
$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{V} =& (3r^2\tfrac{y}{r}z - 2r\tfrac{z}{r}x, -2r\mathrm{e}^{-r^2}\tfrac{z}{r} - 3r^2\tfrac{x}{r}z, (2r\tfrac{x}{r}x + r^2) - (-2r)\mathrm{e}^{-r^2}\tfrac{y}{r}) \\ =& (3yzr - 2zx, -2z\mathrm{e}^{-r^2} - 3zxr, 2x^2 + r^2 + 2y\mathrm{e}^{-r^2}).\end{aligned}$$

---

http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, tel:0775437514 数理情報学科へや:1 号館 5 階 502.

12　quiz – ストークスの定理

曲面 S のパラメータ表示を $\boldsymbol{r}(s,t) = (2, t\sin s, t\cos s)$ $(0 \le s \le 2\pi, 0 \le t \le 3)$ とする．ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (x, z, -y)$ に対して, 面積分

$$I = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{V}) \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S \tag{2}$$

を考える．ただし, $\boldsymbol{n}$ は x 成分が正であるほうの単位法線ベクトル.

1. 曲線 ∂S のパラメータ表示を求めよう．また, $\boldsymbol{n}$ から決まる向き (パラメータの上限下限のどちらが始点終点か) を求めよう.
2. ストークスの定理を用いると,

   $$I = \int_{\partial S} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{3}$$

   である．この式を用いて I の値を求めよう.
3. 暇と興味のある人は, 面積分の式を用いて I を求めよう.

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

問題 8.14(p.183), 問題 8.16(p.184), 章末問題 [8.9](p.187).

休講と補講について

2005/07/19(火) を都合により休講させていただき, 2005/07/23(土)3 講時に補講をさせていただきます.

- 補講では新しい事項を扱うことはしません．ファイナルトライアルの出題範囲は, 2005/07/12(火) の内容までと思っていただいてかまいません．補講では, 復習と問題演習, 解説のみを行います.
- 補講では quiz は行いません．したがって補講は平常点に関係ありません.

お知らせ

実習室や自宅で, Web 上で講義の録画を見られます．自宅での再生には Password が必要です.

UserID:

Password:

`http://hig3.net`

科目のページ ＋ リクエスト / 質問 / 苦情用掲示板

目次 前回 次回 略解