応用ベクトル解析∇

樋口さぶろお[1] 配布: 2005/07/23 Sat 更新: Time-stamp: "2005/07/24 Sun 17:52 hig"

12 略解 – ストークスの定理

1. 曲面 S は, 平面 $x=2$ に含まれる, 中心を $(2,0,0)$ とする半径 3 の円板. このことから, 境界は, 平面 $x=2$ に含まれる, 中心を $(2,0,0)$ とする半径 3 の円周. よってパラメータ表示は,

$$\boldsymbol{r}(t) = (2, 3\sin t, 3\cos t) \qquad (0 \le t < 2\pi) \tag{1}$$

これは $\boldsymbol{V}(s,t)$ で $t=3$ としたものに一致. $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$ より境界の向きが定まり, 始点は $t=2\pi$, 終点は $t=0$.

Comment 境界の個数は場合によって異なります. この場合は 1 個です. 球面に穴を n 個開けたような曲面なら n 個です.

Comment $\boldsymbol{r}(s,t)$ の t と $\boldsymbol{r}(t)$ の t は関係ありません. 別の変数 u を使って, $\boldsymbol{r}(u)=\boldsymbol{r}(u,3)$ などと書いたほうがわかりよかった?

2. ストークスの定理より,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\partial S} \boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{2\pi}^{0} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(t))\cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_{2\pi}^{0} \boldsymbol{V}(2, 3\cos t, -3\sin t)\cdot(0, 3\cos t - 3\sin t)\ \mathrm{d}t = \cdots = -18\pi. \end{aligned} \tag{2}$$

3. $\nabla\times\boldsymbol{V}=(2,0,0)$. 単位法線ベクトルは $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$. ヤコビアンは $J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=t$. よって,

$$I = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{n}\ \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}s\int_0^3 \mathrm{d}t(-2,0,0)\cdot(1,0,0)|t| = \cdots = -18\pi. \tag{3}$$

http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, tel:0775437514 数理情報学科へや:1 号館 5 階 502.

演習問題

飯田先生の過去の期末試験問題を利用させていただいています．この問題の解答は配布しません．

1(2000 年度)

スカラー場

$$f(\boldsymbol{r}) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)} \tag{4}$$

とベクトル場

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (y\sin(xy), z\sin(yz), x\sin(zx)) \tag{5}$$

に対して次の量を計算しよう．

1. ∇f
2. $\nabla \cdot \boldsymbol{V}$
3. $\nabla \times \boldsymbol{V}$

2(2002 年度)

曲面 S のパラメータ表示を $\boldsymbol{r}(s,t) = (2\sin s\cos t, 2\sin s\sin t, \sqrt{2}\cos s)$ $(0 \le s < \pi, 0 \le t < 2\pi)$ とする．$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi) = (1,1,1)$ における接平面の方程式, またはパラメータ表示を求めよう．

3(2002 年度)

曲線 C のパラメータ表示を $\boldsymbol{r}(t) = (3\cos t, 3\sin t, 0)$, $(0 \le t \le \frac{1}{4}\pi)$, ただし始点 $(3,0,0)$, 終点 $(3/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2}, 0)$ とする．またベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (-y, z-x, y)$ とする．線積分

$$\int_C \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{6}$$

を求めよう．

4(2002 年度)

曲面 S のパラメータ表示を $\boldsymbol{r}(s,t) = (s, t, 2-s^2)$ $(-1 \le s \le +1, 0 \le t \le 1)$ とする．ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (-y, z-x, y)$ に対して, 面積分

$$\int_S \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S \tag{7}$$

を求めよう．ただし, S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向きは, $\boldsymbol{n}$ の z 成分が正の値を取るように選ぶ.

5(新作)

方程式

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1, \qquad z \ge \frac{\sqrt{6}}{2} \tag{8}$$

で与えられる曲面 S のひとつのパラメータ表示は $\boldsymbol{r}(s,t) = (2\sin s\cos t, 2\sin s\sin t, \sqrt{2}\cos s)$ $(0 \le s \le \frac{1}{6}\pi, 0 \le t < 2\pi)$ である．面積分

$$\int_C (\nabla \times \boldsymbol{V}) \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S \tag{9}$$

を, ストークスの定理を用いて線積分に書きかえよう．その線積分を計算して答を求めよう．ただし, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (y, -x, z)$．また, S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向きは, $\boldsymbol{n}$ の z 成分が負の値を取るように選ぶ.

お知らせ

実習室や自宅で, Web 上で講義の録画を見られます． 自宅での再生には Password が必要です．

UserID:

Password:

http://hig3.net