応用ベクトル解析∇プチテスト

樋口さぶろお[1] 配布: 2006 年 05 月 30 日更新: Time-stamp: ”2006-06-13 Tue 14:14 JST hig”

プチテスト参加案内

1. **4問60分です．裏もあります**
2. 出席チェックのときに学生証を見せてね.
3. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
4. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.
5. 2 次元 xy-座標系を使っています. $\boldsymbol{r} = (x, y), \boldsymbol{V} = (V_1, V_2)$.
6. 答案の扱いについて, 次の 2 つのうち希望する方を, 答案用紙の欄にマークしよう.
   (a) 1-502 前レターボックスで答案を返却する (他の人が採点後の答案を見る可能性がある).
   (b) 答案を返却せず廃棄する.

   この選択に関わらず, Web での点数の通知は行ないます.

1

スカラー場 $f(\boldsymbol{r}) = 5y^2 - 2x^3y$, ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (-6x^2y, 2x^3 + 10y)$ を考える. 次の式を計算しよう.

1. $\boldsymbol{\nabla} f$
2. $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{V}$
3. $[\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{V}]$

2

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (-y^2, x + 2y)$ を考える. 曲線 C_1 を, 始点 $(0, 2)$, 終点 $(-1, 0)$ の線分とする.

1. この $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ が渦なし条件を満たすかどうか調べよう.
2. 線積分 $\displaystyle\int_{C_1} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を計算しよう.

うらにつづく

hig@math.ryukoku.ac.jp http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

3

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (3x^2 + 8xy + 1, 4x^2 + 3)$ を考える.

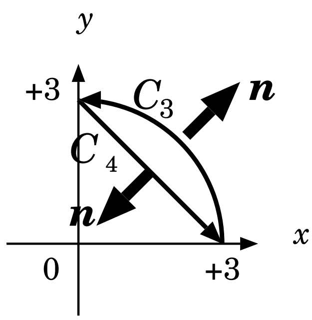
1. $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ が保存場であることを示そう.
2. $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ を満たすスカラー場 $f(\boldsymbol{r})$ を求めよう.
3. 線積分 $\displaystyle\int_{C_2} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を計算しよう. ただし, 曲線 C_2 は, $\boldsymbol{r}(t) = (t, t^2), (1 \leq t \leq 2)$ とパラメータ表示され, 始点 $(1,1)$, 終点 $(2,4)$ である.

Hint. 3 は 2 と無関係に (も) できます.

4

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (x + 2y, -3x + 4y)$ を考える. 曲線 C_3 (原点を中心とする $\frac{1}{4}$ 円弧) と C_4 (線分) をとる. また, 図のように法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向きを決める.

1. C_3 の, 長さパラメター s によるパラメター表示 $\boldsymbol{r}(s)$ を求めよう.
2. 曲線 C_3 の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}(s)$ を求めよう.



3. 線積分 $\displaystyle\int_{C_3} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}s$ を計算しよう.

Hint. ガウスの発散定理と, $\displaystyle\int_{C_4} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}s = -18$ を, (それぞれ証明なしに) 使ってもよい. でも, べつに使わなくても計算できます.

訂正履歴　初出時には $\displaystyle\int_{C_4} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}s = -\frac{9}{2}$ となっていました. おわびします. これを利用した解答は正解と見なしています.

おしまい

応用ベクトル解析∇プチテスト略解

樋口さぶろお[2]

1

1. $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ より $\nabla f = (-6x^2y, 10y - 2x^3)$. 小高 式 (6.2)
2. $\nabla \cdot \boldsymbol{V} = -12xy + 10$.
3. $[\nabla \boldsymbol{V}] = -6x^2 - (-6x^2) = 0$.

2

1. $[\nabla \boldsymbol{V}] = 1 + 2y \neq 0$. よって満たさない. 小高 式 (6.22)
2. 保存場ではないので, 積分路を変更したり, 両端の情報だけから計算したりすることはできない. 積分路は, $\boldsymbol{r}(t) = (0,2) + (-1, -2)t$ $(0 \leq t \leq 1)$ とパラメータ表示される. 始点が $t = 0$, 終点が $t = 1$. 小高 式 (3.18)

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{C_1} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
&= \int_0^1 \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (-(2-2t)^2, -t + 2(2-2t)) \cdot (-1, -2)\, \mathrm{d}t = -\tfrac{5}{3}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

講評　渦なし条件は, '任意の (x, y) に対して $[\nabla \boldsymbol{V}] = 0$' というものです. つまり, 一つでも $[\nabla \boldsymbol{V}] \neq 0$ となる (x, y) があれば渦なし条件は成立しないと言ってかまいません.

また, $1 + 2y = 0$ とそうでないときにわけて 2.2 をやった人もいましたが, 積分の結果が積分変数に依存するって変じゃない?

過程として, 自分がどういうパラメター表示を使ったか書こう.

3

1. 渦なし条件 $[\nabla \boldsymbol{V}] = 8x - 8x = 0$ が成立する. 小高 式 (6.22) あるいは, 具体的に $\nabla f = \boldsymbol{V}$ となるスカラー場 $f(\boldsymbol{r})$ を作って見せてもいいです.
2. 曲線 C_5 を, $(0,0)$ から $(x, 0)$ に至る線分, 曲線 C_6 を, $(x, 0)$ から $\boldsymbol{r} = (x, y)$ に至る線分とすると, 小高 p.145 より,

$$
f(\boldsymbol{r}) = \int_{C_5} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{C_6} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{2}
$$

hig@math.ryukoku.ac.jp http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

曲線 C_5, C_6 はそれぞれ, $\boldsymbol{r}_5(t) = (t, 0)$, $(t \in [0, x])$, $\boldsymbol{r}_6(t) = (x, t)$, $(t \in [0, y])$ とパラメータ表示され, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_5}{\mathrm{d}t} = (1, 0)$, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_6}{\mathrm{d}t} = (0, 1)$. よって,

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{r}) &= \int_0^x \boldsymbol{V}(t,0) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_5}{\mathrm{d}t}(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^y \boldsymbol{V}(x,t) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_6}{\mathrm{d}t}(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^x (3t^2+1, 4t^2+3) \cdot (1,0)\ \mathrm{d}t + \int_0^y (3x^2+8xt+1, 4x^2+3) \cdot (0,1)\ \mathrm{d}t \\
&= x^3 + 4x^2y + 3y + x.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

あるいは, やまかんで求めて, $\boldsymbol{\nabla} f = \boldsymbol{V}$ を確認してもよい. そうすれば 1. もやったことになる.

3. $f(\boldsymbol{r}(2)) - f(\boldsymbol{r}(1)) = f(2,4) - f(1,1) = 77$. 小高 式 (6.21)

別解 保存場なので, 始点終点を保ったままで経路を変更しても線積分の値は変わらない. そこで, 2. で $(x, y) = (2, -1)$ とした積分路をとって, 以下は (3) のように計算すればよい.

別解 $\boldsymbol{r}(t) = (t, t^2)$ をそのまま使って, 問題 2 のようにすなおに積分してしまってもそんなにたいへんじゃないです.

講評 3.2 でやまかんで見つけたときは, かならず '微分するとなってるから OK' と答案に書きましょう.

4

1. 曲線 C_3 のパラメター表示は $\boldsymbol{r}_0(t) = (3\cos t, 3\sin t)$ $(0 \le t \le \frac{1}{2}\pi)$. 長さパラメター $s = \int_0^t \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t}(t')\right|\ \mathrm{d}t' = \int_0^t |(-3\sin t', 3\cos t')|\,\mathrm{d}t' = 3t$. よって $\boldsymbol{r}(s) = (3\cos\frac{1}{3}s, 3\sin\frac{1}{3}s)$ $(0 \le s \le \frac{3}{2}\pi)$.
2. $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}(s)$ と図より $\boldsymbol{n}(s) = (\cos\frac{1}{3}s, \sin\frac{1}{3}s)$.
3. 小高 [問題 8.1]

$$
\begin{aligned}
&\int_{C_3} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(s)) \cdot \boldsymbol{n}(s)\ \mathrm{d}s \\
&= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} (V_1(3\cos s, 3\sin s), V_2(3\cos s, 3\sin s)) \cdot (\cos\tfrac{1}{3}s, \sin\tfrac{1}{3}s)\ \mathrm{d}s \\
&= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} (3\cos\tfrac{1}{3}s + 6\sin\tfrac{1}{3}s, -9\cos\tfrac{1}{3}s + 12\sin\tfrac{1}{3}s) \cdot (\cos\tfrac{1}{3}s, \sin\tfrac{1}{3}s)\ \mathrm{d}s \\
&= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} (3 - 3\sin\tfrac{1}{3}s\cos\tfrac{1}{3}s + 9\sin^2\tfrac{1}{3}s)\mathrm{d}s = \cdots(\text{半角公式})\cdots = \tfrac{45}{4}\pi - \tfrac{9}{2}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

別解 ガウスの発散定理 小高 式 (8.3) を用いると,

$$
\int_{C_3} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}s + \int_{C_4} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}s = \int_D \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{V} \mathrm{d}S. \tag{5}
$$

ただし, D は, C_3 と C_4 の囲む '弓形' の領域. $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{V} = 1 + 4 = 5$ なので,

$$
(\text{右辺}) = \int_D 2\ \mathrm{d}S = 5 \times (D\ \text{の面積}) = 5 \cdot (\tfrac{9}{4}\pi - \tfrac{9}{2}) \tag{6}
$$

よって,

$$\int_{C_3} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \int_D \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{V}\mathrm{d}S - \int_{C_4} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = 5 \cdot (\tfrac{9}{4}\pi - \tfrac{9}{2}) - (-18) = \tfrac{45}{4}\pi - \tfrac{9}{2} \tag{7}$$

プチテストのスコアは個人別に Web でお知らせします.
発表の時点で生協メール t050*nnnx*@ryukoku-u.jp に URL をお知らせします.
http://hig3.net