応用ベクトル解析∇ファイナルトライアル

樋口さぶろお[1] 配布: 2006-07-25 Tue 更新: 2006-07-28 09:40JST

ファイナルトライアル参加案内

1. **外部記憶ペーパー作成 10 分 ＋ 答案作成 (5 問) 80 分です．裏もあります**
2. 出席チェックのときに学生証を見せてね.
3. 過程も答えよう．最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
4. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.
5. いつもと同じ 3 次元 xyz-右手座標系を使っています． $\boldsymbol{r} = (x, y, z), \boldsymbol{V} = (V_1, V_2, V_3)$.

1

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (zx^2, xy^2, yz^2)$, スカラー場 $f(\boldsymbol{r}) = x(y+3z)^2$ を考える．次の式を求めよう.

1. $\boldsymbol{\nabla} f$.
2. $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} f)$.
3. $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{V}$.
4. $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V}$.

2

曲面 S のパラメター表示が $\boldsymbol{r}(s,t) = (s, -t, s^2 - 4t^2)$ で与えられる.

1. 曲面上の点 $\boldsymbol{r}(1,2) = (1, -2, -15)$ における単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求めよう．ただし, $\boldsymbol{n}$ の z 成分は正とする.
2. 点 $\boldsymbol{r}(1,2) = (1, -2, -15)$ における曲面 S の接平面のパラメター表示を求めよう.
3. 点 $\boldsymbol{r}(1,2) = (1, -2, -15)$ における曲面 S の接平面の方程式を求めよう.

3

曲面 S のパラメター表示が $\boldsymbol{r}(s,t) = (5t\cos s, t\sin s, -t^2)$ $(0 \le s < 2\pi, 0 \le t \le 2)$ で与えられる．単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を, z 成分が負となるようにとる．ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (-y, x, 2z)$ に対して, 面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S$ を求めよう.

$\boxed{\text{うらにつづく}}$

[1]Copyright ©2005,2006 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.
hig@math.ryukoku.ac.jp http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

4

球座標で $\boldsymbol{r}(r,\theta,\phi)=(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$ $(2\le r\le 3, 0\le\theta\le\pi, 0\le\phi<2\pi)$ とパラメター表示される立体 D を考える．体積分 $\displaystyle\int_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}V$ を求めよう．ただし, 球座標の Jacobian を知っていれば, 導かずに使ってよい．

5

曲面 D のパラメター表示が $\boldsymbol{r}(s,t)=(t\cos s, t\sin s, -3)$ $(0\le s<2\pi, 3\le t\le 4)$ で与えられている．ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})=(y,-x,z^2\mathrm{e}^{-x+2y})$ に対して面積分 $I=\displaystyle\int_D(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$ を考える．ここで, $\boldsymbol{n}$ は D の単位法線ベクトルで, z 成分が正である．

1. D の境界の曲線 ∂D のパラメター表示を求めよう．(ストークスの定理の積分路としてあらわれる) 右ねじの向きのときの始点と終点を示そう．
2. ストークスの定理を利用して, D 上の面積分 I を ∂D 上の線積分に書き直して I の値を求めよう．

おしまい

アンケート

アンケートにご協力ください．成績とは無関係です．

1. 一通り解き終わるのにかかった時間を教えてください (外部記憶ペーパー作成の 10 分を含まない)
2. (a) だいたい予想していた問題が出題された (b) どちらともいえない (c) 予想外の問題が出題された
3. 外部記憶ペーパーは (a) 実質的に役に立った (b) 精神的安定を得られた (c) なくても同じ
4. 他の科目と比較して試験準備にかけた時間は (a) 長い (b) 同程度 (c) 短い
5. 次のうち, (部分的でも) 行った試験準備をすべて挙げてください．(a) ノートを読み直してみる (b) 昨年度 (以前) の期末試験問題を解いてみる (c)quiz を解き直してみる (d) プチテストを解き直してみる (e) 指定された教科書の問題を解いてみる
6. その他なんでもファイナルトライアルについての感想/苦情/質問

成績についてのお知らせ

ファイナルトライアルのスコアおよび科目の成績は 2006-08-01 までに個人別に Web でお知らせします．発表の時点で生協メール `t050`*nnnx*`@ryukoku-u.jp` に URL をお知らせします．

`http://hig3.net`

応用ベクトル解析∇ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお[2]

1

1. $\boldsymbol{\nabla} f = ((y+3z)^2, 2x(y+3z), 6x(y+3z))$.
2. $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} f = 20x$.
3. $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V} = 2(xz+xy+yz)$.
4. $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{V} = (z^2, x^2, y^2)$.

2

1.
$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s,t) = (1,0,2s), \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(1,2) = (1,0,2),\\
&\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(s,t) = (0,-1,-8t), \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(1,2) = (0,-1,-16).\\
&\boldsymbol{n} = \frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(1,2)\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(1,2)}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(1,2)\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(1,2)\right|}\times(\pm 1) = \pm\frac{1}{\sqrt{261}}(2,16,-1).
\end{aligned}$$
   z 成分が正であるという条件より, $\boldsymbol{n} = -\frac{1}{\sqrt{261}}(2,16,-1)$.
2. $\boldsymbol{r}_{接平面}(s,t) = \boldsymbol{r}(1,2) + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(1,2)s + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(1,2)t = (1,-2,-15)+(1,0,2)s+(0,-1,-16)t$.
3. $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}(1,2))\cdot\boldsymbol{n} = 0$ を整理して $2x+16y-z=-15$.

3

$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s,t) = (-5t\sin s, t\cos s, 0)$, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(s,t) = (5\cos s, \sin s, -2t)$ なので,

$$\begin{aligned}
&\int \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s\\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}s\int_0^2 \mathrm{d}t\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(s,t))\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s,t)\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(s,t)\right)\\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}s\int_0^2 \mathrm{d}t\,(-t\sin s, 5t\cos s, -2t^2)\cdot(-2t^2\cos s, -10t^2\sin s, -5t)\\
&= \int_0^{2\pi}(-48\sin s\cos s+10)\mathrm{d}s\times\int_0^2 t^4\mathrm{d}t\\
&= \cdots(\text{倍角公式})\cdots = 80\pi.
\end{aligned} \tag{1}$$

[2]Copyright ©2005,2006 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.
hig@math.ryukoku.ac.jp http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

4

立体 D は中心に空洞のある球 (厚みのある球殻). 球座標の Jacobian は $r^2\sin\theta$ であることに注意して,

$$\begin{aligned}
&\int_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}V\\
=&\int_2^3 \mathrm{d}r\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\,\sqrt{r^2\sin^2\theta}\cdot r^2\sin\theta\\
=&\int_2^3 r^3\mathrm{d}r\times\int_0^\pi \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\times\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\\
=&\cdots(\text{半角公式})\cdots=\frac{65}{4}\pi^2.
\end{aligned}$$

5

1. D は xy 平面に平行な平面上にある五円玉型であり, 内側外側 2 個の境界

$$\begin{aligned}
&C_3:\boldsymbol{r}_3(t)=\boldsymbol{r}(t,3)=(3\cos t,3\sin t,-3)\quad(0\le t<2\pi),\\
&C_4:\boldsymbol{r}_4(t)=\boldsymbol{r}(t,4)=(4\cos t,4\sin t,-3)\quad(0\le t<2\pi)
\end{aligned}$$

を持つ. 右ねじの向きを考えると, C_3 の始点は $\boldsymbol{r}_3(2\pi)$, 終点は $\boldsymbol{r}_3(0)$. C_4 の始点は $\boldsymbol{r}_4(0)$, 終点は $\boldsymbol{r}_4(2\pi)$.

2. ストークスの定理より,

$$\begin{aligned}
I=&\int_{C_4}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{C_3}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\
=&\int_0^{2\pi}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_4(t))\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_4}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t+\int_{2\pi}^0\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_3(t))\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_3}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t\\
=&\int_0^{2\pi}(4\sin t,-4\cos t,\text{超複雑})\cdot(-4\sin t,4\cos t,0)\,\mathrm{d}t\\
&+\int_{2\pi}^0(3\sin t,-3\cos t,\text{超複雑})\cdot(-3\sin t,3\cos t,0)\,\mathrm{d}t\\
=&2\pi(-16+9)=-14\pi.
\end{aligned}$$

Remark $\nabla\times\boldsymbol{V}=(\text{複雑},\text{複雑},-2)$ であり, 五円玉上で面積分すると

$$I=\int_D(-2)\mathrm{d}S=-2(\pi4^2-\pi3^2)=-14\pi$$

であることが確かめられる.