応用ベクトル解析∇

樋口さぶろお[1]　配布: 2006/05/09 Tue 更新: Time-stamp: "2006-06-08 Thu 10:58 hig"

4 略解 – 勾配ベクトル場を描こう

1. $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{r}) = (-3x^2y^2, 4y - 2x^3y)$.
2. $[\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{V}] = \frac{\partial V_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial V_1}{\partial y}(x, y) = (-1) - (+1) = -2 \neq 0$. よって渦なし条件を満たさない.
3. このベクトル場は, $[\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{V}] = 6x^2y - 6x^2y = 0$ で渦なし条件を満たす. よって自分の都合のよい積分経路に変更しても線積分の値は変わらない. そこで, 線分 $C_1 : \boldsymbol{r}_1(t) = (t, t)\ (0 \leqq t \leqq 1)$ を選ぶ. すると,

$$I = \int_{C_1} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^1 (3t^2t^2, 2t^3t) \cdot (1, 1)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 5t^4\ \mathrm{d}t = 1. \tag{1}$$

別解 $f(\boldsymbol{r}) = x^3y^2$ ととると $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ となることに気づくと,

$$I = f(1, 1) - f(0, 0) = 1. \tag{2}$$

5 quiz – 3 次元の勾配

1. ベクトル場 $\boldsymbol{V}(x, y, z) = (2xz^3, 4y^3, 3x^2z^2)$ を考える.
   (a) ベクトル場 $\boldsymbol{V}(x, y, z)$ が保存場であることを示そう.
   (b) 線積分 $\int_C \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を求めよう. ただし, C は, $(3, 2, 1)$ を始点, $(-2, -3, -1)$ を終点とする線分である.
2. (削除)

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

3 次元の勾配

小高 問題 7.1(p.152), 問題 7.2(p.153), 章末問題 [7.1](p.166), 章末問題 [7.3] の前半 (p.166).

3 次元の線積分

小高 問題 7.19(p.163), 問題 7.20(p.163), 問題 7.22(p.165).

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

3 次元のベクトル場

小林-高橋, ベクトル解析入門, 東京大学出版会 (2003) p.48, 図 2.14 より引用

pdf バージョンでは図は省略

プチテストのお知らせ

05 月 30 日 (火) にやります.

オフィスアワー　オフィスアワー月昼休 (1-612), 火 1(1-502) は, 樋口が確実に在室 (1-612 or 1-502) して, 授業についての質問にお答えする時間です. なんでも相談に来てね.

講義の録画　下の Web ページから講義の録画が見られます (2005 年度の再放送もあります)
UserID:

Password:

講義の Web ページ　`http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/vector/` です.

`http://hig3.net/` から簡単にたどっていけます. いくつかのページは携帯対応してます. (下の QR コード)

目次 前回 次回 略解