

[目次](#) [前回](#) [次回](#) [略解](#)

応用ベクトル解析

樋口さぶろお¹ 配布: 2006/05/16 Tue 更新: Time-stamp: "2006-06-08 Thu 10:59 hig"

5 略解 – 3次元の勾配

1. (a) $\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} = 6xz^2 - 6xz^2 = 0$. 同様に, $\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} = \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = 0$. よって渦なし条件をみたし, 保存場である.

(b) 渦なし条件をみたすので, 積分路を折れ線 $(3, 2, 1) \rightarrow (-2, 2, 1) \rightarrow (-2, -3, 1) \rightarrow (-2, -3, -1)$ に変更すると,

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} &= \dots = \int_0^{-5} V_1(3+t, 2, 1) dt + \int_0^{-5} V_2(-2, 2+t, 1) dt + \int_0^{-2} V_3(-2, -3, 1+t) dt \\ &= \int_0^{-5} 2 \cdot (3+t) \cdot 1^3 dt + \int_0^{-5} 4(2+t)^3 dt + \int_0^{-2} 3(-2)^2(1+t)^2 dt = 52. \end{aligned}$$

これは, 第 1,2,3 項でそれぞれ $t_1 = 3+t$, $t_2 = 2+t$, $t_3 = 1+t$ と変数変換して

$$\int_3^{-2} V_1(t_1, 2, 1) dt_1 + \int_2^{-3} V_2(-2, t_2, 1) dt_2 + \int_1^{-1} V_3(-2, -3, t_3) dt_3$$

と書くとわかりやすいし計算しやすいかも.

別解 $f = x^2z^3 + y^4 + C$ とおくと $\nabla f = \mathbf{V}$. よって, $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = f(-2, -3, -1) - f(3, 2, 1) = 52$.

2. (問題削除)

6 2次元の発散とガウスの発散定理

ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (xy, 2y)$, 曲線 C を, 始点 $(-2, 0)$ と終点 $(0, -3)$ を結ぶ線分とする.

1. 曲線 C の, 長さパラメータ s によるパラメータ表示 $\mathbf{r}(s)$ (の一つ) が, $\mathbf{r}(s) = (-2, 0) + \frac{1}{\sqrt{13}}(2, -3)s$, $0 \leq s \leq \sqrt{13}$ であることを, L02 の quiz を参照して納得しよう. ただし, $s = 0$ が始点, $s = \sqrt{13}$ が終点.

2. ベクトル場の線積分その 2

$$\int_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds \tag{1}$$

を求めよう. \mathbf{n} は進行方向右向き単位法線ベクトル.

¹Copyright ©2005,2006 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

3. $\nabla \cdot V$ を求めよう.

4. ベクトル場の線積分

$$\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \quad (2)$$

を求めよう.

ベクトル場の発散 $\nabla \cdot V$

小林-高橋, ベクトル解析入門, 東京大学出版会 (2003) p.130, 図 6.8 より引用

pdf バージョンでは図は省略

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

小高 問題 6.8(p.126), 問題 6.9(p.128), 問題 8.1(p.174), 問題 8.2(p.174), 章末問題 [6.3](p.148), 章末問題 [6.3](p.149).

プチテストのお知らせ 05月30日(火)にやります. 掲示参照.

オフィスアワー オフィスアワー月昼休 (1-612), 火 1(1-502) は, 樋口が確実に在室 (1-612 or 1-502) して, 授業についての質問にお答えする時間です. なんでも相談に来てね.

講義の Web ページ <http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/vector/> です.

<http://hig3.net/> から簡単にたどっていただけます. いくつかのページは携帯対応しています. (下の QR コード)

講義の録画 下の Web ページから講義の録画が見られます (2005 年度の再放送もあります)

UserID:

Password:

