

目次 前回 次回 略解

応用ベクトル解析

樋口さぶろお¹ 配布: 2006/05/23 Tue 更新: Time-stamp: "2006-06-08 Thu 10:59 hig"

6 略解 – 2次元の発散とガウスの発散定理

- たとえば, $\mathbf{r}_0(t) = (-2, 0) + (2, -3)t$ ($0 \leq t \leq 1$) のようなパラメータ表示を考えたとすると, $|\frac{d\mathbf{r}_0}{dt}(t)| = \sqrt{13}$ なので, 長さパラメータ $s = \int_0^t |\frac{d\mathbf{r}_0}{dt}(t')| dt' = \sqrt{13}t$ となって納得する.
- 単位法線ベクトルは $\pm \frac{1}{\sqrt{13}}(3, 2)$ だが, 進行方向右向きという条件を図から考えて $\mathbf{n} = -\frac{1}{\sqrt{13}}(3, 2)$.

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds &= \int_0^{\sqrt{13}} \mathbf{V}(\mathbf{r}(s)) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}(s)) ds \\ &= \int_0^{\sqrt{13}} \left((-2 + \frac{2}{\sqrt{13}}s)(\frac{-3}{\sqrt{13}}s), 2(\frac{-3}{\sqrt{13}}s) \right) \cdot \frac{-1}{\sqrt{13}}(3, 2) ds \\ &= \int_0^{\sqrt{13}} \left(\frac{18}{13\sqrt{13}}s^2 - \frac{6}{13}s \right) ds = 3. \end{aligned} \quad (1)$$

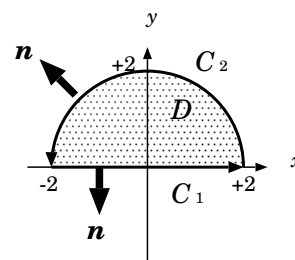
- $\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(x, y) = y + 2$.
- (このベクトル場は渦なし条件を満たさないので, Quiz 5の方法は使えない. 最初にやった方法を使う)

$$\begin{aligned} I &= \int_C \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) dt \\ &= \int_0^1 ((-2 + 2t)(-3t), 2(-3t)) \cdot (2, -3) dt \\ &= \int_0^1 (-12t^2 + 30t) dt = 11. \end{aligned} \quad (2)$$

7 ガウスの発散定理

$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (0, 2y - 3)$ とする.

- 図の線分 C_1 , 半円弧 C_2 に対して, $I_i = \int_{C_i} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds$ を求めよう.



¹Copyright ©2005,2006 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

2. 図の半円板を D としたとき, $\int_D \nabla \cdot \mathbf{V} \, dS$ を計算しよう.

$\partial D = C_1 + C_2$ なので, ガウスの発散定理から

$$I_1 + I_2 = \left(\int_{\partial D} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, ds = \right) \int_D \nabla \cdot \mathbf{V} \, dS \quad (3)$$

となってるはずだけど, 本当に成り立ってる?

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

ガウスの発散定理 小高 問題 8.1(p.174), 問題 8.2(p.174).

渦度とグリーン の定理 小高 問題 6.16(p.135), 問題 8.6(p.178), 問題 8.7(p.178), 章末問題 [6.5](p.149).

プチテスト出題計画 05月30日(火)のプチテストについては掲示を参照してください. 試験範囲は05月23日までの授業の内容すべてです. 次の4問を出題します.

1. ∇ とベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r})$, スカラー場 $f(\mathbf{r})$ の出てくる計算. (quiz 4.1, 4.2, 6.3)
2. 渦なし条件が成立しないベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ の, $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}$ タイプの線積分を計算する問題 (quiz 3, 6.4)
3. 渦なし条件が成立するベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ の, $\nabla f = \mathbf{V}$ となる f を求める問題, $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}$ タイプの線積分を計算する問題 (quiz 4, 5.1)
4. $\int_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, ds$ タイプの線積分を計算する問題 (quiz 6,7)

オフィスアワー オフィスアワー月昼休 (1-612), 火 1(1-502) は, 樋口が確実に在室 (1-612 or 1-502) して, 授業についての質問にお答えする時間です. なんでも相談に来てね.

講義の Web ページ <http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/vector/> です.

<http://hig3.net/> から簡単にたどっていただけます. いくつかのページは携帯対応しています. (下の QR コード)

講義の録画 下の Web ページから講義の録画が見られます (2005 年度の再放送もあります)

UserID:

Password:

