応用ベクトル解析∇

樋口さぶろお[1]　配布: 2006-06-20 Tue 更新: Time-stamp: "2006-06-20 Tue 16:10 JST hig"

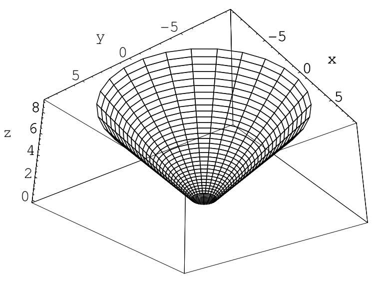
9 略解 − 曲面上の面積分

1. $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s,t) = (-t^2 \sin s, t^2 \cos s, 0)$, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(s,t) = (2t \cos s, 2t \sin s, st)$, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s,t) = (2t^3 \cos s, 2t^3 \sin s, -2t^3)$, $\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(s,t)\right| = 2\sqrt{2}t^3$.

$$\text{表面積}\, S = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}s \int_1^3 \mathrm{d}t \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s,t)\right| = 2\pi \int_0^3 2\sqrt{2}t^3 \mathrm{d}t = 80\sqrt{2}\pi. \quad (1)$$

2. 法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(s,t)$ に平行だが, $\boldsymbol{n}$ の z 成分が正という条件から, 逆向きであることがわかる. そこで, (-1) をかけて逆向きにする.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}s \int_1^3 \mathrm{d}t\, \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(s,t)) \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}s \int_1^3 \mathrm{d}t\, \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(s,t)) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(s,t)\right) \times (-1) \qquad (2) \\ &= -\int_0^{2\pi} \mathrm{d}s \int_1^3 \mathrm{d}t\, (3t^2 \cos s, 0, 0) \cdot (2t^3 \cos s, \text{略}, \text{略}) = -728\pi. \end{aligned}$$



3. ありじごく型.

10 quiz − 立体のパラメター表示と体積分

1. パラメター表示 $\boldsymbol{r}(r,\theta,u) = (r\cos\theta, r\sin\theta, u)$, $(0 \le r \le 3, 0 \le \theta < 2\pi, -3 \le u \le 0)$ で表される立体 D_1 とスカラー場 $f(\boldsymbol{r}) = x^2$ を考える. 体積分 $I_1 = \int_{D_1} f(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}V$ を求めよう.

2. 半径 2 の球 $D_2 = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 \le 4\}$ と, その境界である球面 ∂D_2 , その外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を考える.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (3x, -2y, z)$ に対して, $I_2 = \displaystyle\int_{\partial D_2} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S$ を求めたい (腕力と暇のある人は直接に計算してみよう). ガウスの発散定理によれば, この面積分は $I_2 = \displaystyle\int_{D_2} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{V}) \, \mathrm{d}V$ に等しい. この形で計算してみよう.

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

立体のパラメター表示と体積分

問題 5.1–6(p.109–114), 章末問題 [5.1]–[5.5](p.114–115).

球座標

問題 2.18(p.49), 問題 2.19(p.49).

球座標

小林-高橋, ベクトル解析入門, 東京大学出版会 (2003) p.49, 50, 図 2.16, 2.17, p.110, 図 5.3 より引用

pdf バージョンでは図は省略

プチテストスコアレポート　講義の Web ページから確認できます.

講義の Web ページ　`http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/vector/` です.

`http://hig3.net/` から簡単にたどっていけます. いくつかのページは携帯対応してます. (下の QR コード)

休講と補講のおわび　都合により, 2006-06-27 Tue の応用ベクトル解析を休講させていただきます. 通常の補講期間に補講を 1 講時分行います.

ファイナルトライアルのお知らせ　2006-07-25 Tue の予定です. 科目の成績 100 点中 60 点分です. 脳の負担を軽減するため, 外部記憶ペーパーの使用が可能です (詳しくは 2005 年度のファイナルトライアル案内を参照してください)

目次 前回 次回 略解