

[目次](#) [前回](#) [次回](#) [略解](#)

応用ベクトル解析

樋口さぶろお¹ 配布: 2006-07-04 Tue 更新: Time-stamp: "2006-07-02 Sun 12:08 JST hig"

10 略解 — 立体のパラメータ表示と体積分

1. Jacobian J は, 行列式を計算して,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial r}(r, \theta, u) & \frac{\partial r}{\partial \theta}(r, \theta, u) & \frac{\partial r}{\partial u}(r, \theta, u) \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r. \quad (1)$$

体積分は

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-3}^0 du (x(r, \theta, u))^2 \cdot |J(r, \theta, u)| \\ &= \int_0^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-3}^0 du (r \cos \theta)^2 |r| \\ &= \int_0^3 r^3 dr \times \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \times \int_{-3}^0 du \\ &= \frac{81}{4} \times \pi \times 3 = \frac{243}{4} \pi. \end{aligned} \quad (2)$$

2. $\nabla \cdot \mathbf{V} = 3 - 2 + 1 = 2$. この立体は半径 2 の球 (の内部) であり, 体積分は球座標を用いて実行できるが,

$$I_2 = \int_{D_2} 2 dV = 2 \int_{D_2} dV = 2 \times (\text{球の体積}) = 2 \times \frac{4}{3} \pi \cdot 2^3 = \frac{64}{3} \pi \quad (3)$$

のように簡単にも計算できる (ふつうはスカラー場 $\nabla \cdot \mathbf{V}$ は定数でなく r に依存するので, 今回こんなに簡単になったのはラッキーだっただけ).

11 quiz — ベクトル場の回転とストークスの定理

1. ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (-2z, y^2 e^y, 3x)$ の回転 $\nabla \times \mathbf{V}$ を求めよう.

2. 曲面 D は $\mathbf{r}(\theta, \phi) = (2 \sin \theta \cos \phi, 2 \cos \theta, 2 \sin \theta \sin \phi)$ ($0 \leq \theta \leq \frac{1}{6}\pi, 0 \leq \phi < 2\pi$) とパラメータ表示される. ストークスの定理の一边に現れる曲面上的の面積分 $I_1 = \int_D (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} dS$ を計算しよう. ただし, \mathbf{n} は, y 座標が正の単位法線ベクトル.

3. 暇と興味のある人は, ストークスの定理のもう一边に現れる線積分 $I_2 = \int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}$ を計算してみよう. ただし, $C = \partial D$ は D の境界で, $\mathbf{r}_C(t) = \mathbf{r}(\frac{1}{6}\pi, t)$ とパラメータ表示される (向きと始点終点は?)

¹Copyright ©2005,2006 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

3次元の回転 小高 問題 7.11(p.157), 章末問題 [7.1]–[7.7](p.166)

ストークスの定理 小高 問題 8.14(p.183), 問題 8.16(p.184), 章末問題 [8.9](p.187).

渦度ゼロのベクトル場とゼロでないベクトル場

小林-高橋, ベクトル解析入門, 東京大学出版会 (2003) p.132 図 6.9 より引用

pdfバージョンでは図は省略

講義の Web ページ <http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/vector/> です. <http://hig3.net/> から簡単にたどっていただけます. いくつかのページは携帯対応してます. (下の QR コード)

ファイナルトリアルのお知らせ 2006-07-25 Tue の予定です. 科目の成績 100 点中 60 点分です. 脳の負担を軽減するため, 外部記憶ペーパーの使用が可能です (詳しくは 2005 年度のファイナルトリアル案内を参照してください)

オフィスアワー オフィスアワー月昼休, 火 1 は, 樋口が確実に在室 (1-502) して, 授業についての質問にお答えする時間です. なんでも相談に来てね.

講義の録画 下の Web ページから講義の録画が見られます (2005 年度の再放送もあります)

UserID:

Password:

