応用ベクトル解析∇

樋口さぶろお[1] 配布: 2006-07-20 Thu 更新: Time-stamp: "2006-07-20 Thu 11:49 JST hig"

12　略解 – ストークスの定理

S の境界は $\partial S = C_2 \sqcup C_3$ の 2 つの部分からなる. パラメター表示は

$$\boldsymbol{r}_2(t) = \boldsymbol{r}(t,2) = (2\cos s, 2\sin s, 2) \quad (0 \leq t < 2\pi)$$
$$\boldsymbol{r}_3(t) = \boldsymbol{r}(t,3) = (3\cos s, 3\sin s, 3) \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

ただし, 右ねじの法則から, C_2 は $\boldsymbol{r}_2(2\pi)$ が始点, $\boldsymbol{r}_2(0)$ が終点, C_3 は $\boldsymbol{r}_3(0)$ が始点, $\boldsymbol{r}_3(2\pi)$ が終点. よって, ストークスの定理より, 積分は,

$$\begin{aligned}&\int_{C_2} \boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{C_3} \boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ =&\int_{2\pi}^{0} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_2(t))\cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{2\pi} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_3(t))\cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_3}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t = (-4+9)\times 2\pi = 10\pi.\end{aligned} \tag{1}$$

[1]
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

演習問題

飯田先生の過去の期末試験問題を利用させていただいています． この問題の解答は配布しませんが, `http://whale2.math.ryukoku.ac.jp/` > 過去問からたどって得られるものもあります．
UserID:

Password:

1(樋口 2005 年度)

スカラー場 $f(\boldsymbol{r}) = \mathrm{e}^{x+2y-3z}$ とベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (xy^2, yz^2, zx^2)$ に対して次の量を計算しよう．

1. ∇f
2. $\nabla \cdot (\nabla f)$
3. $\nabla \cdot \boldsymbol{V}$
4. $\nabla \times \boldsymbol{V}$

2(飯田先生 2002 年度改)

曲面 S のパラメータ表示を $\boldsymbol{r}(s,t) = (2\sin s\cos t, 2\sin s\sin t, \sqrt{2}\cos s)$ $(0 \le s < \pi, 0 \le t < 2\pi)$ とする．$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi) = (1,1,1)$ における接平面の方程式, およびパラメータ表示を求めよう．

3

立体 D のパラメーター表示を $\boldsymbol{r}(r,\theta,t) = (r\cos\theta, r\sin\theta, t)$ $(0 \le r \le 2, 0 \le \theta < 2\pi, -1 \le t \le 2)$ とする． スカラー場 $f(\boldsymbol{r}) = x^2 + y$ を考える．体積分

$$\int_D f(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V \tag{2}$$

を求めよう．

4(飯田先生 2002 年度)

曲面 S のパラメーター表示を $\boldsymbol{r}(s,t) = (s, t, 2-s^2)$ $(-1 \le s \le +1, 0 \le t \le 1)$ とする．ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (-y, z-x, y)$ に対して, 面積分

$$\int_S \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S \tag{3}$$

を求めよう．ただし, S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向きは, $\boldsymbol{n}$ の z 成分が正の値を取るように選ぶ．

5

立体 D のパラメーター表示を $\boldsymbol{r}(r,\theta,\phi) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$ $(0 \le r \le 3, 0 \le \theta \le \frac{1}{2}\pi, 0 \le \phi < 2\pi)$ とすると, D は (中身のつまった) 半球である．$C = \partial D$ を, 円板と半球面からなる境界の曲面とする．$\boldsymbol{n}$ を C の外向き単位法線ベクトルとする．ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (y^2, -x^2, z^2)$ に対して,

$$\int_C \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S \tag{4}$$

をガウスの発散定理を利用して計算しよう．

5’

先週やったストークスの定理の例題．

お知らせ

実習室や自宅で, Web 上で講義の録画を見られます． 再生には Password が必要です．
UserID:

Password:

`http://hig3.net`

科目のページ ＋ リクエスト / 質問 / 苦情用掲示板