

ベクトル解析 ファイナルトライアル

樋口さぶろお¹ 配布: 2009-07-27 Mon 更新: Time-stamp: "2009-08-04 Tue 10:09 JST hig"

ファイナルトライアル参加案内

1. **6問です．外部記憶ペーパー作成 10分，答案作成 80分．**
2. 解答用紙の1面に1問ずつ，指定された用紙に解答しよう．
3. 過程も答えよう．最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう．
4. 問題文に現れない記号を使うときは，定義を記そう．
5. 2次元では $\mathbf{r} = (x, y)$, $\mathbf{V} = (V_1, V_2)$, 3次元では $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)$.

1

2次元のベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (3x + 5y, xy^2 + 7x)$. とスカラー場 $f(\mathbf{r}) = 7x^3y + y^3$. に対して，次の量を計算しよう．

1. $\nabla \cdot \mathbf{V}$
2. $(\nabla \times \mathbf{V})_z$
3. ∇f

2

パラメタ表示された曲面 $\mathbf{r}(s, t) = (s, s^2 + 2st, 2t)$ を考える．この曲面の上の点 $\mathbf{r}(3, 2) = (3, 21, 4)$ を考える．

1. 点 $\mathbf{r}(3, 2)$ における曲面の接平面のパラメタ表示を求めよう．
2. 点 $\mathbf{r}(3, 2)$ における曲面の法線ベクトルをひとつ求めよう．
3. 点 $\mathbf{r}(3, 2)$ における曲面の接平面の方程式を求めよう．

3

曲面 S は $\mathbf{r}(s, t) = (2t \cos s, t^2, 2t \sin s)$ ($0 \leq s < 2\pi, 0 \leq t \leq 3$) とパラメタ表示される．

1. 曲面 S の面積を求めよう．
2. ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (0, 1, 0)$ と， S の単位法線ベクトル \mathbf{n} に対して，面積分 $\int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS$ を求めよう．ただし， \mathbf{n} の向きは， y 成分が負になるように定める．

¹Copyright ©2009 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

4

ベクトル場 $V(\mathbf{r}) = (-x + 2y, -2x - 3y)$ を考える. 曲線 C のパラメタ表示を $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t)$ ($0 \leq t \leq \pi$) とする. 曲線 C の, y 座標が正であるような単位法線ベクトルを \mathbf{n} とする.

1. \mathbf{n} を t で表そう.
2. 線積分 (マーク 2) $\int_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, ds$ を求めよう.

5

領域 D を, $(\pm 2, \pm 3)$ を 4 頂点とする長方形の内部とする. その境界の閉曲線を ∂D とする. ただし, 向きは反時計回りとする. ベクトル場 $V(\mathbf{r}) = (-5y, 3x^2 + 7x + y)$ に対して, 線積分 (マーク 1) $\int_{\partial D} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}$ を, グリーンの定理を用いて面積分書き直すことにより計算しよう.

6

原点を中心とする半径 3 の球の内部を D , その境界である半径 3 の球面を $\partial D = S$ とする. S の外向き単位法線ベクトルを \mathbf{n} とする. A, B, C, D, E を定数とすると, ベクトル場を $V(\mathbf{r}) = (Ax^2 + Bx + Cy + Dz + E, 0, 0)$ に対して, 曲面上の面積分 $\int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS$ を 3 次元のガウスの発散定理を用いて体積分書き直すことにより計算しよう.

Hint 体積分には直交座標 (x, y, z) または球座標 (r, θ, ϕ) を使うとよいかもかもしれない.

7

これは問題でなくアンケートです.

1. 解答にまあまあ自信のある問題は何問ありますか.
2. まったくわからない問題が何問ありましたか.
3. まったくわからない問題を除いて, ひと通り解き終わるのに何分かかりましたか. 解き終わらなかった人は, 何分あればひと通り解き終わりそうですか.

ベクトル解析 ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお² 配布: 2009-07-27 Mon 更新: Time-stamp: "2009-08-04 Tue 10:09 JST hig"

1

1. $\nabla \cdot \mathbf{V} = 3 + 2xy$
2. $(\nabla \times \mathbf{V})_z = (y^2 + 7) - (5) = y^2 + 2$
3. $\nabla f = (21x^2y, 7x^3 + 3y^2)$

講評

3. がポテンシャルを求める問題と混ざってる人がいました.

採点

1,2,3 各 5 点. 計 15 点.

2

1. $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s, t) = (1, 2s + 2t, 0)$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(3, 2) = (1, 10, 0)$.
 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s, t) = (0, 2s, 2)$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(3, 2) = (0, 6, 2)$.
よって, 接平面のパラメタ表示は $\mathbf{r}_{\text{接平面}}(s, t) = (3, 21, 4) + (1, 10, 0)s + (0, 6, 2)t$.
2. 法線ベクトルのひとつは $N = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(3, 2) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(3, 2) = (1, 10, 0) \times (0, 6, 2) = (20, -2, 6)$.
3. 曲面の接平面の方程式は $N \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}(3, 2)) = 0$ すなわち, $10x - y + z = 21$.

講評

1. で, $\mathbf{r}(s, t) = (3, 21, 4) + (1, 2s + 2t, 0)s + (0, 2s, 2)t$ のような間違いがあったのは残念. プチテストで接線について同じ注意したんだけどな ~ 平面のいちばん簡単なパラメタ表示は 1 次式でしょ.

2. 単位ベクトルでなくていいので, 長さを計算したりする必要はありません. なぜか長さを計算して何にも使っていない人が多数いました.

3. は, 授業でやった式では単位法線ベクトルを使ったけど, どうせ定数倍は関係ないので, 単位でない法線ベクトルでなくてもいいでしょ.

²Copyright ©2005-2007 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

それからさいごに x, y, z にパラメタ表示を代入しちゃってる人もいたけど、そうしたら自明な式 $0 = 0$ になっちゃうし意味ありません。方程式って x, y, z に対する条件でしょ。

採点

1:10点,2:5点,3:5点. 計20点.

ベクトルが太字になってないなど、記号の使い方のおかしい場合に -1 点している場合があります。

3

1. $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s, t) = (-2t \sin s, 0, 2t \cos s)$. $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s, t) = (2 \cos s, 2t, 2 \sin s)$.

法線ベクトルのひとつは $N = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s, t) = (-4t^2 \cos s, 4t, -4t^2 \sin s)$.

$t \leq 0$ に注意すると, $|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s, t)| = 4t(1 + t^2)^{1/2}$.

曲面の面積は

$$\begin{aligned} \int_S dS &= \int_0^{2\pi} ds \int_0^3 dt \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s, t) \right| \\ &= \int_0^{2\pi} ds \int_0^3 dt 4t(1 + t^2)^{1/2} = 2\pi \cdot 2 \left[\frac{2}{3}(1 + t^2)^{3/2} \right]_0^3 = \frac{8}{3}(\cdot 10^{3/2} - 1)\pi. \end{aligned}$$

2. 上の N の向きは条件と逆. よって

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_0^{2\pi} ds \int_0^3 dt \mathbf{V}(\mathbf{r}(s, t)) \cdot \left((-1) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s, t) \right) \\ &= \int_0^{2\pi} ds \int_0^3 dt (-4t) = 2\pi[-2t^2]_0^3 = -36\pi. \end{aligned}$$

講評

1. がまったくできてない人が多かったのは意外. 出題計画にははいつてたじゃん. もしかして過去問にはなかったことに惑わされた? 過去問は役立つこともあるけど, まず今年の授業内容や出題計画を把握した方がいいと思うよ. わざと n 年周期で出題ののりを変える教員もいるかもしれないしね~

いい感じで計算を進めてる人の中に, $\sqrt{16t^2 + 16t^4} = \sqrt{16t^2} + \sqrt{16t^4}$ になっちゃってる人がいたのは残念. $\sqrt{1+1} = \sqrt{1} + \sqrt{1}$ ですか?

2. では, n をがんばって計算して $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds dt$ を積分しちゃってる人がけっこういました. Jacobian とキャンセルして楽になるんで, n を求める必要はないんだよね~

採点

計 20 点.

1. $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s, t)$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s, t)$ 各 2 点. N に 2 点, $|N|$ に 2 点, 面積の式の形に 3 点. 積分の計算結果に 2 点.

2. 法線ベクトルの正しい向きに 2 点. 面積分の正しい式の形に 3 点. 積分の計算結果に 2 点.

ベクトルが太字になってないなど, 記号の使い方のおかしい場合に -1 点している場合があります.

4

1. 法線ベクトルは $R_{\pi/2} \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = R_{\pi/2}(-2 \sin t, 2 \cos t) = (-2 \cos t, -2 \sin t)$. y 座標が正な単位法線ベクトルを作ると, $(\cos t, \sin t)$.

2. 線積分の値は

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \int_0^\pi \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot R_{\pi/2} \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \, dt \\ &= \int_0^\pi (-2 \cos t + 4 \sin t, -4 \cos t - 6 \sin t) \cdot (2 \cos t, 2 \sin t) \, dt = -8\pi \end{aligned}$$

講評

線積分マーク 2 のはずがマーク 1 を計算しちゃってる人が多数いました. マーク 2 は出題計画にはいってただけだな ~

2. では, $n dt$ で積分しちゃった人もいました. $n \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right| dt$ か $R_{\pi/2} \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) dt$ かのどちらかです. 授業では後者をお奨めしました.

採点

計 15 点.

1. 計 5 点. 平行なベクトルが出てれば 3 点. 向きと長さが正しければ各 1 点加算.

2. 計 10 点. 線積分マーク 2 の正しい式の形に 5 点, 積分の結果に 5 点.

ベクトルが太字になってないなど, 記号の使い方のおかしい場合に -1 点している場合があります.

5

グリーンの定理を用いて,

$$\int_{\partial D} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_D (\nabla \times \mathbf{V})_z \, dS = \int_D (6x + 7 + 5) \, dS = \int_{-2}^{+2} dx \int_{-3}^{+3} dy (6x + 12) = 288$$

なお、 D は $x = 0$ に関して対称な領域なので、奇関数 $6x$ の寄与は 0 で、 $12 \times (D \text{ の面積})$ で求まることがわかる。

領域を $(\pm 2, 0), (0, \pm 3)$ の菱形と勘違いしてる人がいました。その場合答は (この問の場合はたまたま) 半分の 144 になりますが、その答えに行き着いた人は少なかった。というのは、 y の上下限の曲線の式を $y = \pm 3 \mp \frac{3}{2}x$ としてやってる人が多かったから。真ん中で折れてる線だから場合分けになるよね。また、根拠なく、第 1 象限を計算して 4 倍すればいいと思ってる人もいました。そういう計算が許されるのは、定数関数の場合や、面積 (定数関数 = 1) の場合だけ。

グリーン定理を使わないで、すなわち線積分マーク 1 してるひともいました。その場合の値は各辺で 156, 60, 12, 60 です。それで正解を出せる計算力には敬意を表しますが、試験問題としてはグリーン定理を使って求めようって問題なので、使ってない場合は満点は出していません。

採点

計 15 点。

グリーン定理の適用に 5 点、 $(\nabla \times \mathbf{V})_z$ の計算に 5 点、積分の結果に 5 点。

ベクトルが太字になってないなど、記号の使い方のおかしい場合に -1 点している場合があります。

6

3 次元のガウスの発散定理より、

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \int_D (\nabla \cdot \mathbf{V}) \, dV = \int_D (2Ax + B) \, dV \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \int_0^3 dr (2Ar \sin \theta \cos \phi + B) r^2 \sin \theta = \frac{4}{3} \cdot 3^3 B \pi = 36B\pi \end{aligned}$$

積分領域が $x = 0$ に関して対称なので奇関数 $2Ax$ の寄与は 0、 B の寄与は $B \times (\text{球 } D \text{ の体積})$ として求めてもよい。

講評

これも 2007 年の過去問になかったために正解率が低いのか? 直前の授業でやって、その quiz や模範解答を作ろうプロジェクトにかなり近い問題だったんだけどな ~

せっかく体積積分に直しながら、積分範囲が $\int_{-3}^3 dx \int_{-3}^3 dy \int_{-3}^3 dz$ になってる人が。それって立方体で球じゃないよね ~

採点

計 15 点.

ガウスの発散定理の適用に 5 点, $(\nabla \times V)_z$ の計算に 5 点, 球座標の Jacobian を含めて積分が正しくかけていれば 3 点. 積分の結果に 2 点.

ベクトルが太字になってないなど, 記号の使い方のおかしい場合に -1 点している場合があります.



<http://hig3.net>