

目次 前回 次回 略解

ベクトル解析

樋口さぶろお¹ 配布: 2009-05-11 Mon 更新: Time-stamp: "2009-05-11 Mon 09:03 JST hig"

3 略解 — 曲線と曲線の接線と法線を描こう!

1. パラメタ t を消去すると直線 $y = -\frac{3}{2}x + 7$ の一部分であることがわかる.

2. $\mathbf{r}(t) = (0, 1) + (2, -1)t$ ($0 \leq t \leq 1$). もちろんパラメタ表示は一通りではないので $\mathbf{r}(t) = (2, 0) + (-2, 1)t$ ($0 \leq t \leq 1$) などいくらでもある.

3. $\mathbf{r}(t) = (2, 0) + 2(\cos t, \sin t)$ ($0 \leq t \leq \pi$).

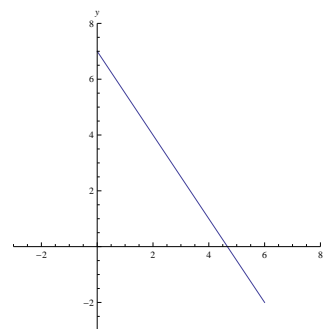
4. $\mathbf{r}(t_0) = (-4, -2)$ を解くと $t_0 = -2$. また, $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0) = (-2t_0, 1) = (4, 1)$ よって接線は

$$\mathbf{r}_{\text{接}}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0)(t - t_0) = (-4, -2) + (4, 1)(t + 2)$$

5. $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0) = (4, 1)$ を $\pi/2$ 回転すると, $(-1, 4)$. よって,

$$\mathbf{r}_{\text{法}}(t) = (-4, -2) + (-1, 4)t.$$

6. 再出題します



4 ベクトル場の線積分を計算しよう!

今日の目標

- パラメタ表示された曲線の長さを求められるようになるう!
- 場所によって太さの違うロープの合計の重さを計算できるようになるう!(曲線に沿った関数の線積分=線積分マーク 0)
- 吹雪の中を歩くアデリーペンギンの大変さを求められるようになるう(曲線に沿ったベクトル場の線積分=線積分マーク 1)

¹Copyright ©2009 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

quiz

- あるエリアの地点 (x, y) での風は時間によらず一定で、ベクトル場 $V(x, y) = (-y + 1, x + y)$ で与えられる。また、このエリアを直立2本足歩行するアデリーペンギンの、時刻 t での位置は $r(t) = (x(t), y(t)) = (-4t, 2t)$ で与えられる(前回からちょっと変えました)。
 - 時刻 t にアデリーペンギンを感じる風を表すベクトルを求めよう。
 - アデリーペンギンの正面から風が吹いてくる時刻を求めよう。
 - アデリーペンギンの真横から風が吹いてくる時刻を求めよう。この時刻に、風はアデリーペンギンのくちばしの右側にあたるか左側にあたるか答えよう。
 - アデリーペンギンの大変さ $\int_C (-V) \cdot dr$ を求めよう (C はアデリーペンギンの歩く経路)
- パラメタ表示された曲線 $C_2 : r(t) = (3e^{-2t} \cos t, 3e^{-2t} \sin t)$ ($0 \leq t < +\infty$) の長さを求めよう。
- 上の曲線 C_2 に沿った、関数 $f(t) = e^{-5t}$ の線積分(マーク0) $\int_{C_2} f ds$ を求めよう。
- パラメタ表示された曲線 $C_3 : r(t) = (2 + t^2, 1 + 3t^2)$ ($0 \leq t \leq 2$) の長さを求めよう。
- 上の曲線 C_3 に沿った、関数 $f(t) = 3t - 2$ の線積分(マーク0) $\int_{C_3} f ds$ を求めよう。
- ベクトル場 $V(x, y) = (3y^2, 2x)$ と曲線 $C_4 : r(t) = (-t^3, t)$ ($0 \leq t \leq 2$) を考える。曲線 C_4 に沿ったベクトル場 V の線積分(マーク1) $\int_{C_4} V \cdot dr$ を求めよう。

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

小高 問題 3.2, 問題 3.3, 問題 3.4(p.72), 問題 3.9, 問題 3.10(p.75), 問題 3.11, 問題 3.12(p.76), 章末問題 [3.4], [3.5], [3.6](p.81), [3.7], [3.8](p.82).



<http://hig3.net>